

آزمون مرحله‌ی دوم سیزدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n \geq 3$ ، دو مجموعه $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ از اعداد صحیح وجود دارد به طوری که

$$A \cap B = \emptyset \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \quad (2)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \quad (3)$$

۲. مثلث ABC که زوایای آن حاده هستند و خط L واقع در صفحه مثلث مفروضند. گزینه‌های خط L را نسبت به هریک از اضلاع مثلث ABC به دست می‌آوریم تا یکدیگر را در A' ، B' و C' قطع کنند. ثابت کنید مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ روی دایره محیطی مثلث ABC قرار می‌گیرد.

۳. $12k$ نفر در یک مهمانی شرکت کرده‌اند. هر نفر دقیقاً با $3k+6$ نفر دیگر از مهمانان دست می‌دهد. همچنین می‌دانیم تعداد افرادی که با (هر دوی) هر دو نفر دست می‌دهند، عددی ثابت است. تعداد افراد شرکت کننده در این مهمانی را تعیین کنید.

۴. فرض کنید $S = \{2^m 3^n \mid m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. ثابت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان برحسب حاصلجمع اعضای متمایز S نوشت که هیچ‌یک از عوامل جمع مضربی از عامل دیگری نباشد. (مثلاً $19 = 9 + 6 + 4$).

۵. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ داریم:

$$\left\lceil \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{9n+8} \right\rceil$$

منظور از $\lceil x \rceil$ ، کوچکترین عدد صحیحی است که بزرگتر از x یا مساوی با آن است.

۶. در چهاروجهی $ABCD$ فرض کنید A' ، B' ، C' و D' به ترتیب مراکز دایره محیطی مثلث‌های BCD ، CDA ، DAB و ABC باشند. اگر صفحه‌ای را که از نقطه X بر خط YZ عمود می‌شود، به $S(X, YZ)$ نمایش دهیم ثابت کنید چنانچه A' ، B' ، C' و D' در یک صفحه نباشند چهار صفحه $S(A, C'D')$ ، $S(B, A'D')$ ، $S(C, A'B')$ و $S(D, B'C')$ از یک نقطه می‌گذرند.

حل مسائل مرحله‌ی دوم سیزدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. راه حل اول. کافی است بگیریم

$$A = \{1, 2, 3, \dots, n-1\} \cup \left\{ -\frac{n(n-1)}{2} \right\}$$

$$B = \{-1, -2, -3, \dots, -(n-1)\} \cup \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \right\}$$

به وضوح A و B در شرایط مسأله صدق می‌کنند.

البته در صورت مسأله اعداد صحیح مورد نظر بوده است ولی حتی اگر منظور اعداد طبیعی باشد دقت می‌کنیم که اگر هر دسته جواب را به اندازه یک عدد صحیح منتقل کنیم، باز هم جواب است.

راه حل دوم. به روش استقراء عمل می‌کنیم

$$n = 3: \quad A = \{0, 4, 5\}, \quad B = \{1, 2, 6\}$$

فرض کنید برای $n = k$ شرایط مورد نظر برقرار باشد، یعنی

$$\sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k y_i, \quad \sum_{i=1}^k x_i^2 = \sum_{i=1}^k y_i^2$$

حال درستی حکم را برای $n = k+1$ نشان می‌دهیم. فرض کنید

$$A = \{x_1, \dots, x_{n-1}, rx_n, x_n + ry_n\}$$

$$B = \{y_1, \dots, y_{n-1}, ry_n, rx_n + y_n\}$$

برای $r \neq 0$ شرایط مورد نظر برقرار است. فقط کافی است r را به اندازه کافی بزرگ بگیریم تا هیچ‌یک از دو مجموعه اعضای برابر نداشته باشد.

راه حل سوم. توجه می‌کنیم که دسته مجموعه‌های ۳ عضوی، ۴ عضوی و ۵ عضوی زیر جواب هستند.

$$n = 1: A = \{0, 4, 5\}, \quad B = \{1, 2, 6\}$$

$$n = 2: A = \{10, -10, 11, -11\}, \quad B = \{5, -5, 14, -14\}$$

$$n = 3: A = \{10, 11, -14, -5, -2\},$$

$$B = \{-10, -11, 14, 5, 2\}$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم سیزدهمین المپیاد ریاضی

برای هر $n \geq 3$ مفروض، برحسب آنکه $n = 3k$ ، $n = 3k + 1$ و یا $n = 3k + 2$ ، به کمک دسته جوابهای فوق و با توجه به اینکه انتقال هر دسته جواب به اندازه یک عدد صحیح بازم جواب است، جواب مورد نظر را می‌سازیم.

۲. این سه خط را L' ، L'' و L''' می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\alpha = \angle A$ ، $\beta = \angle B$ و $\gamma = \angle C$. خط L' با عمل قرینه کردن نسبت به BC به خط L می‌رود و خط L با قرینه کردن نسبت به AB به خط L''' برده می‌شود، پس L''' حاصل دوران L' حول نقطه B به اندازه زاویه 2β است. حال چون B از L' و L''' به یک فاصله است، پس BB' نیمساز زاویه B' است. مشابهاً با دورانی به مرکز A و به اندازه زاویه 2α ، خط L'' به L''' برده می‌شود و AA' نیمساز زاویه A' است، و بالاخره با دورانی به اندازه زاویه 2γ حول C ، خط L'' نیز به L' می‌رود، و CC' نیمساز زاویه C' است. پس این سه خط در نقطه ω که مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ است هم‌رسند. نتیجه می‌شود که

$$\angle C'B'\omega = 90^\circ - \beta$$

$$\angle B'C'\omega = 90^\circ - \gamma$$

در نتیجه

$$\angle B\omega C = \angle B'\omega C' = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$$

پس ω روی دایره محیطی مثلث ABC قرار می‌گیرد.

حالت خاص. اگر L از محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC بگذرد L' ، L'' و L''' از یک نقطه روی دایره محیطی مثلث ABC می‌گذرند، یعنی $\triangle A'B'C'$ یک نقطه روی دایره محیطی $\triangle ABC$ است.

۳. فرض کنید تعداد افرادی که با هر دو نفر دست می‌دهند n باشد. شخص a را در نظر بگیرید، فرض کنید

$B = \{\text{افرادی که با } a \text{ دست داده‌اند}\}$

$C = \{\text{افرادی که با } a \text{ دست نداده‌اند}\}$

می‌دانیم

$$|B| = 3k + 6$$

$$|C| = 9k - 7$$

اگر $b \in B$ باشد، افرادی که هم با a و هم با b دست می‌دهند در B هستند، پس b با n نفر در B دست می‌دهد و با $3k + 5 - n$ نفر در C .

اگر $c \in C$ باشد همه افرادی که هم با a و هم با c دست می‌دهند در B هستند پس c با n نفر در B دست می‌دهد.

پس در مجموع تعداد دست دادنهای بین B و C رابطه زیر را نتیجه می‌دهد.

$$(3k + 6)(3k + 5 - n) = (9k - 7)n$$

$$9k^2 - 12kn + 33k + n + 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 3m \\ 4m = k + 3 + \frac{9k + 43}{12k - 1} \end{cases}$$

حال برای $k \geq 15$ داریم $9k + 43 < 12k - 1$ و $4m$ صحیح نخواهد بود، و برای $1 \leq k \leq 14$ ، فقط برای $k = 3$ جواب صحیح داریم، پس ۳۶ نفر در مهمانی بوده‌اند.

حل مسائل مرحله‌ی دوم سیزدهمین المپیاد ریاضی

۴. با استقرا عمل می‌کنیم.

$$1 = 1, \quad 2 = 2, \quad 3 = 3, \quad 4 = 2^2, \quad 5 = 2 + 3, \quad \dots$$

فرض کنید برای هر عدد کوچکتر از k حکم درست باشد، حال حکم را برای k ثابت می‌کنیم.
حالت اول. $k = 2l$ زوج، در این صورت l را به صورت حاصلجمع مورد نظر می‌نویسیم و هر کدام از عوامل را دو برابر می‌کنیم.

حالت دوم. k فرد، فرض کنید p بزرگترین توان از عدد ۳ است که کوچکتر از k است، فرض کنید $q = \frac{k-p}{4}$ ، عدد p را به عنوان یکی از عوامل جمع بگیرید و اگر $q > 0$ آنگاه با استقرا q را می‌توان به صورت حاصلجمع مورد نظر، $q = \sum s_i$ ، نوشت. نشان می‌دهیم $k = p + \sum 2s_i$ یک حاصلجمع مورد نظر است. چون p توانی از ۳ است، پس مضربی از $2s_i$ نیست، حال اگر به ازای یک i ، عدد $2s_i$ مضربی از p باشد آنگاه $2s_i \geq 3p$ و این متناقض با این است که $k < 3p$.

۵. به ازای $n = 0, 1, 2$ رابطه برقرار است، به ازای $n \geq 3$ با استفاده از عبارت درجه دوم $(x-1)x(x+1)$ (حدس ریشه‌ها) نتیجه می‌شود

$$n(n+1)(n+2) > \left(n + \frac{8}{9}\right)^3$$

حال با استفاده از نامساوی میانگین هندسی و حسابی داریم

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{3} &> \sqrt[3]{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}} \\ &> \sqrt{n + \frac{8}{9}} \end{aligned}$$

و

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} > \sqrt{9n+8}$$

و با استفاده از نامساوی میانگین جذر داریم

$$\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{3} < \sqrt{\frac{n+n+1+n+2}{3}}$$

پس

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} < \sqrt{9n+9}$$

چون هیچ عدد صحیحی بین $\sqrt{9n+8}$ و $\sqrt{9n+9}$ قرار ندارد، پس

$$\left\lceil \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{9n+8} \right\rceil$$

۶. کره‌هایی به مرکزهای A' ، B' ، C' و D' به ترتیب به شعاعهایی برابر با شعاع دایره محیطی مثلثهای ABC و DAB ، CDA ، BCD در نظر می‌گیریم و آنها را به ترتیب S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 می‌نامیم. A روی کره‌های S_3 و S_4 قرار دارد و $C'D'$ خط‌المرکزین S_3 و S_4 می‌باشد، بنابراین $S(A, C'D')$ صفحه اصلی دو کره S_3 و S_4 می‌باشد (صفحه اصلی دو کره، مشابه محور اصلی دو دایره، مکان هندسی

حل مسائل مرحله‌ی دوم سیزدهمین المپیاد ریاضی

نقاطی است که نسبت به دو کره دارای یک قوت هستند و می‌شود ثابت کرد که بر خط‌المركزین عمود است).

به همین ترتیب $S(D, B'C')$ و $S(C, A'B')$ ، $S(B, A'D')$ ، (S_1, S_4) ، (S_1, S_2) و (S_2, S_3) می‌باشند و لذا از یک نقطه می‌گذرند (زیرا مرکزهای این کره‌ها در یک صفحه نیستند).

