

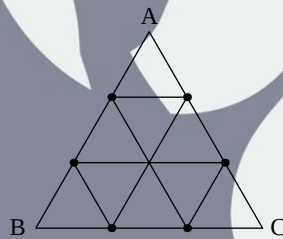
آزمون مرحله‌ی دوم دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۳

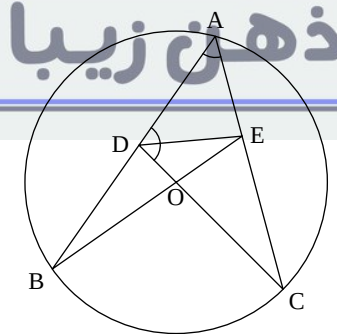
منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. در مثلث دلخواه ABC هر ضلع را به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم ($n \geq 2$). از هر نقطه تقسیم روی هر ضلع، خطوطی به موازات دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم. مثلاً برای $n = 3$ شکل زیر حاصل می‌شود.
- برای هر $n \geq 2$ تعداد متوازی‌الاضلاع‌های به‌وجود آمده را مشخص کنید.



۲. در شکل نقطه O مرکز دایره است. زاویه α چند درجه است؟



آزمون مرحله‌ی دوم دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی

۳. $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح و $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویاست. تمام توابع $f: \mathbb{Z} - \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ را طوری پیدا کنید که در معادله تابعی زیر صدق کنند.

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

۴. اگر $\overline{a_1 \dots a_n}$ یک عدد n رقمی باشد ثابت کنید تابعی یک به یک مانند

$$f: \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$$

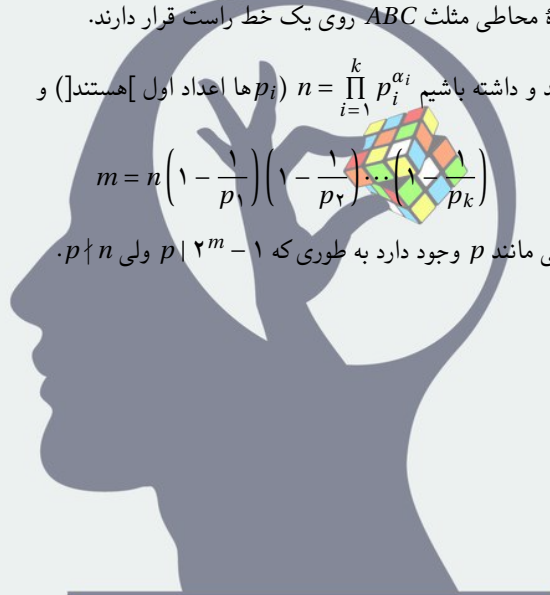
وجود دارد به طوری که $f(a_1) \neq 0$ و $f(a_1) \dots f(a_n)$ بر ۳ بخشپذیر باشد.

۵. فرض کنید در مثلث ABC نقاط M ، N و P به ترتیب نقاط تماس دایره محاطی داخلی ABC با اضلاع AB ، AC و BC باشند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث MNP ، مرکز دایره محاطی [مثلث ABC] و مرکز دایره محاطی مثلث ABC روی یک خط راست قرار دارند.

۶. اگر $n > 3$ فرد باشد و داشته باشیم $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ (p_i ها اعداد اول هستند) و

$$m = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

نشان دهید عدد اولی مانند p وجود دارد به طوری که $1 - 2^m \mid p$ ولی $p \nmid n$.



ذهن زیبا

حل مسائل مرحله‌ی دوم دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

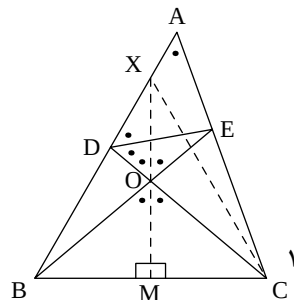
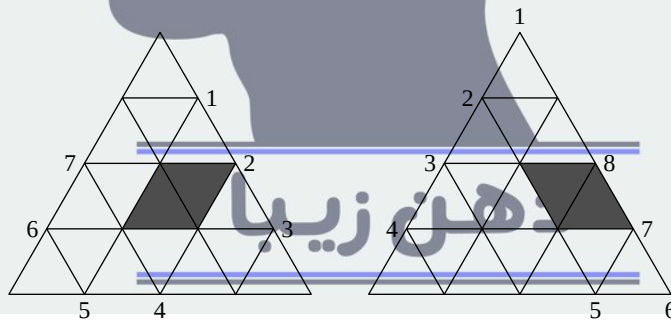
زمان برگزاری: دی ماه ۱۳۷۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. هر متوازی‌الاضلاع از برخورد دو زوج خط موازی به دست می‌آید و این خطها اضلاع مثلث را در ۷ یا ۸ نقطه قطع می‌کنند (زیرا ممکن است دو خط روی یک ضلع به هم برسند) در واقع دو ضلع دو نقطه تقاطع دارند و یک ضلع ۳ یا ۴ نقطه، لذا هر متوازی‌الاضلاع با انتخاب یک ضلع و ۳ یا ۴ نقطه روی آن مشخص می‌شود، چون روی هر ضلع $n+1$ نقطه موجود است، داریم

$$3 \times \left(\binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{3} \right) = 3 \times \binom{n+2}{4}$$



۲.

حل مسائل مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد ریاضی

عمود منصف BC را رسم می‌کنیم تا AB را در X قطع کند، آنگاه دو مثلث DOE و ODX برابرند (ض.ز) و مثلث BOD متساوی الساقین است، پس اگر $BX = BE = k$ و $BC = a$ باشد، داریم

$$\angle BXC = 36^\circ - 6\alpha \implies \angle BCX = 3\alpha - 90^\circ$$

و

$$\angle BEC = 5\alpha - 180^\circ \text{ و } \angle BCA = 270^\circ - 4\alpha$$

حال در مثلث BXC می‌گوییم

$$k < a \implies 3\alpha - 90^\circ < 36^\circ - 6\alpha \implies \alpha < 50^\circ$$

و در مثلث EBC داریم

$$k < a \implies 270^\circ - 4\alpha < 5\alpha - 180^\circ \implies \alpha > 50^\circ$$

به همین ترتیب برای $k > a$ نیز تناقض مشابهی حاصل می‌شود، لذا زاویه α برابر 50° درجه می‌شود.
۳. ادعا می‌کنیم f ، تابع ثابت است.

$$f(1) = f\left(\frac{1+2}{3}\right) = f(1) + f(2) \implies f(1) = f(2)$$

$$f(2) = f\left(\frac{3+3}{3}\right) = \frac{f(3) + f(3)}{2} \implies f(2) = f(3)$$

فرض کنید

$$f(1) = f(2) = \dots = f(3k)$$

پس

$$f(2) = f(k+1) = f\left(\frac{3k+1+2}{3}\right) = \frac{f(3k+1) + f(2)}{2} \implies f(3k+1) = f(2)$$

$$f(1) = f(k+1) = f\left(\frac{3k+2+1}{3}\right) = \frac{f(3k+2) + f(1)}{2} \implies f(3k+2) = f(1)$$

$$f(3) = f(k+2) = f\left(\frac{3k+3+3}{3}\right) = \frac{f(3k+3) + f(3)}{2} \implies f(3k+3) = f(3)$$

در نتیجه

$$f(1) = f(2) = f(3) = \dots = f(3k) =$$

$$f(3k+1) = f(3k+2) = f(3k+3)$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد ریاضی

پس f روی اعداد صحیح و مثبت ثابت است، اگر $x < 0$ آنگاه $-x + 3 > 0$ پس

$$\begin{aligned} f(1) &= f\left(\frac{x + (-x + 3)}{3}\right) = \frac{f(x) + f(-x + 3)}{2} \\ &= \frac{f(x) + f(1)}{2} \end{aligned}$$

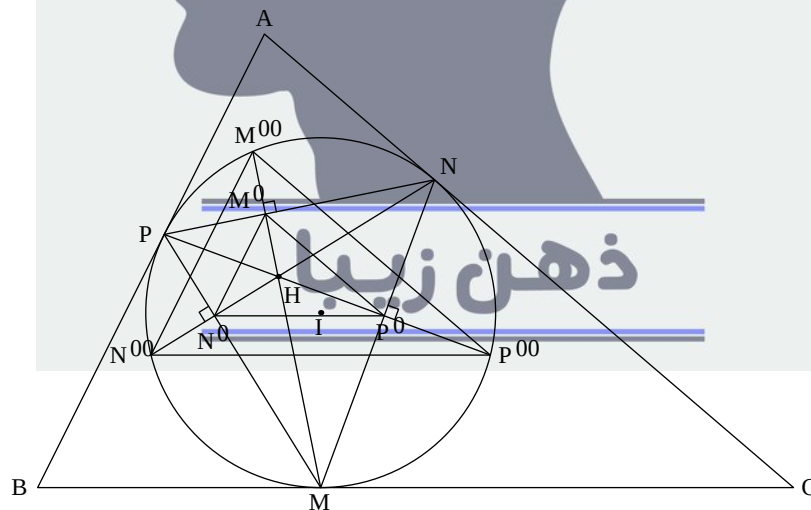
پس $f(x) = f(1)$ و f ثابت است.

۴. فرض کنید b_i تعداد تکرار رقم i ام باشد اگر b_i و b_j موجود باشند که

$$b_i \equiv b_j \not\equiv 0 \pmod{3}$$

آنگاه تعریف می‌کنیم $f(j) = 8$ و $f(i) = 7$ ، این روند را روی بقیه ارقام ادامه می‌دهیم و به جای $f(i)$ و $f(j)$ به ترتیب ۴ و ۵، و ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم، بعد از اتمام این روند یا تعداد ارقام باقیمانده کوچکتر یا مساوی ۴ است یا فقط یک a_k و یک a_l موجودند که $a_l \equiv 2$ و $a_k \equiv 1$. در حالت اول ارقام باقیمانده را با ۵، ۳، ۶ و ۹ جایگزین می‌کنیم و در حالت دوم k و l را با ۵ و ۳ جایگزین خواهیم کرد (در هر حالت رقم اول را با غیرصفر جایگزین می‌کنیم)، برقراری شرطهای مسأله واضح است.

۵. $M'N'P'$ را مثلث ارتفاعی MNP می‌گیریم، به راحتی دیده می‌شود که اضلاع متناظر دو مثلث $M'N'P'$ و ABC موازیند، پس یک نقطه مانند G وجود دارد که دو مثلث با تجانس مرکزی نسبت به آن، به هم تبدیل می‌شوند.



پس مرکز دایره محاطی داخلی $P'N'M'$ ، I (مرکز دایره محاطی ABC) و G روی یک خط راست قرار دارند، یعنی I ، H و G روی یک خط هستند، همچنین مرکز دایره محیطی $M'N'P'$ ، O و G نیز روی یک خط واقعند، حال توجه می‌کنیم که دو مثلث $M'N'P'$ و $M''N''P''$ با تجانس به مرکز H به هم تبدیل می‌شوند. پس مرکز دایره محیطی $M'N'P'$ (مثلاً نقطه O') و مرکز دایره محیطی $M''N''P''$ (نقطه I)، و H روی یک خط واقع می‌شوند.

حل مسائل مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد ریاضی

پس ثابت شد که O, H, I, G و O' روی یک خط قرار دارند.

۶. واضح است که $m \mid 2^k$ ، پس خواهیم داشت:

$$2^m - 1 = t^{2^k} - 1$$

که در آن $t > 3$ و t زوج است. حال داریم

$$2^m - 1 = t^{2^k} - 1 = (t - 1) \prod_{i=0}^{k-1} (t^{2^i} + 1)$$

یعنی $2^m - 1$ دارای $k + 1$ عامل است که به شکل $t - 1$ و $t^{2^i} + 1$ هستند و دویّه‌دو نسبت به هم اولند ولی n دارای k عامل اول است پس $2^m - 1 \mid \exists p, p \mid 2^m - 1$ و $P \nmid n$.

