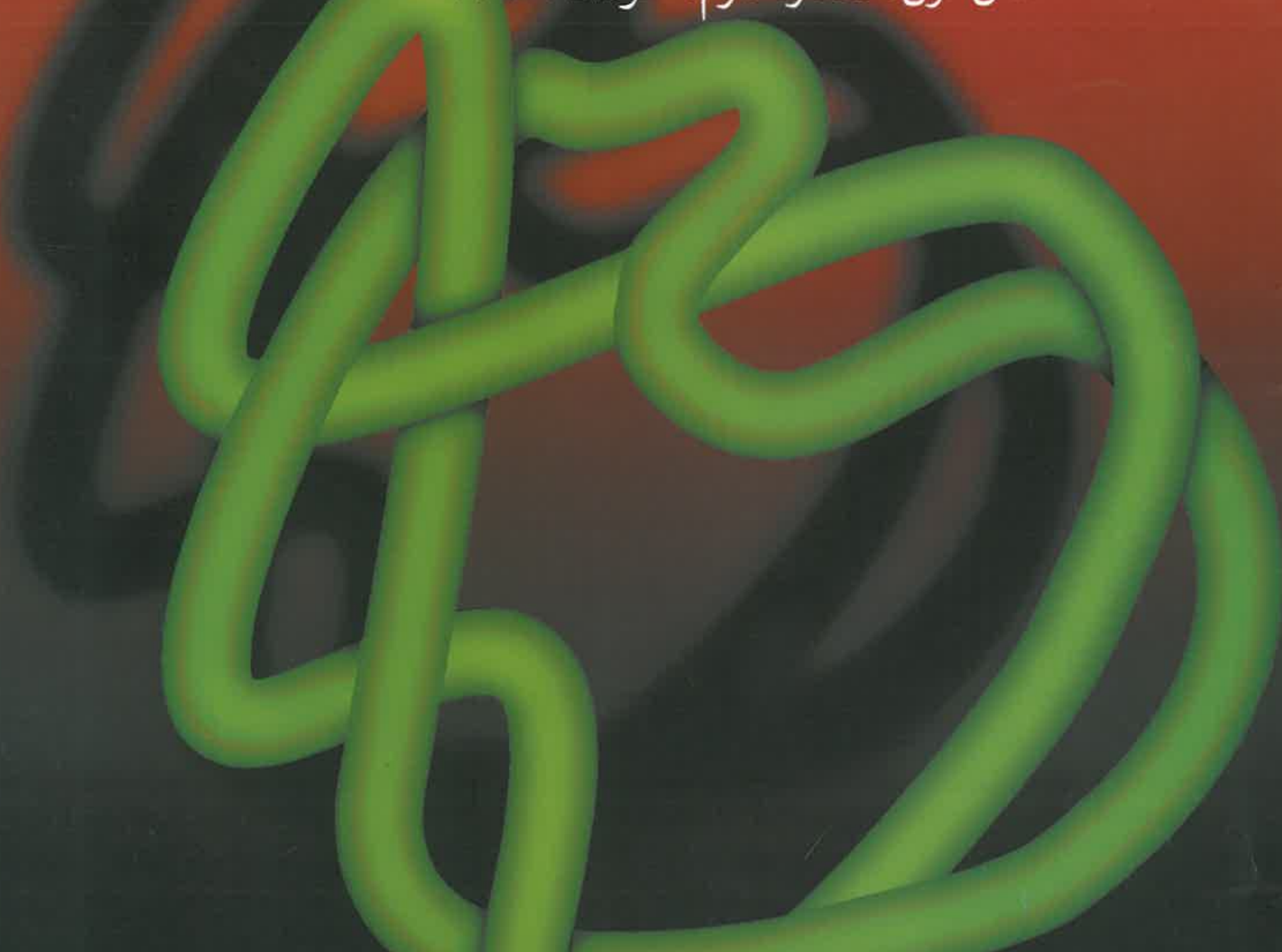
ماهنامه ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال اول، شمارهٔ دوم، خرداد ۱۳۷۹



۳۰۰ تومان

بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی
سال اول، شمارهٔ دوم، خرداد ۱۳۷۹

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول
یحیی تابش

هیأت تحریریه
محمدرضا پورنکی
یحیی تابش
کورش توکلی
بردیا حسام
سهیلا غلام‌آزاد
امید نقشینه ارجمند

حروف‌چینی، طراحی و صفحه‌آرایی
آتلیهٔ ماهنامهٔ ریاضیات، با تشکر از آزاده فرجی

چاپ و صحافی
محمدامین(خیابان آزادی، بلوار استاد معین)

لیتوگرافی
مجید(میدان فاطمی ـ ۶۵۷۸۷۰)

نشانی دفتر ماهنامه
شمارهٔ ۱۵۹، خیابان استاد مطهری، تهران ۱۵۷۶۶
تلفن: ۸۷۵۲۰۳۴ (۰۲۱)
دورنگار: ۸۷۴۴۹۵۵ (۰۲۱)
پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

این شماره با حمایت ستاد ملی سال جهانی ریاضیات منتشر شده‌است.

فهرست

روی جلد: نگاه کنید به مقالهٔ آشنایی با نظریهٔ گره‌ها.

یادداشت‌ها

شاید این مطالب را می‌بایست در شمارهٔ پیش می‌نوشتیم، ولی خوب؛ نوشتیم! ماهنامهٔ ریاضیات، که اکنون دومین شماره‌اش را پیش رو دارید، بخش‌های مختلفی دارد. بعد از «یادداشت ها» ــ که بخش چندان مهمی هم نیست! ــ بخش «مقاله‌ها» شروع می‌شود که ــ برخلاف بخش قبلی! ــ خیلی مهم است. گوشه‌هایی از زیبایی ریاضیات را می‌توانید اینجا بیابید. اگر از مقاله‌ای لذت بردید، سعی کنید آن را برای چند نفر از دوستانتان به شکل سمینار مطرح کنید. این کار، بی‌شک، مفید است.

یکی از کارهای لازم برای یاد گرفتن دروس ریاضی، مسأله حل کردن است. اگر احساس کردید مسأله‌های کتاب‌های درسی‌تان برایتان کافی نیست، «مسأله‌های درسی» ما را هم حل کنید.

به بخش «سرگرمی» فقط با دید سرگرمی نگاه نکنید! گاهی پشت یک بازی ساده، انبوهی از ایده‌های اساسی پنهان شده‌اند. ما نگاه عمیق به این بخش را به عهدهٔ خودتان گذاشته‌ایم.

المپیاد ریاضی در این چند سال اخیر میدانی شده برای زورآزمایی آنها که فکر می‌کنند در ریاضیات کَسی هستند. چه از این افراد هستید و چه نیستید، بخش «المپیاد» را بخوانید و سعی کنید مسأله‌های آن را حل کنید. به‌یاد داشته باشید که معمولاً یک مسألهٔ المپیادی پیچیده‌تر از یک مسألهٔ درسی است و «یک ساعت فکر کردن» روی آن چیز عجیبی نیست. پیشنهاد می‌کنیم در حل کردن مسأله‌های المپیادی، گاهی با دوستانی که از نظر توان علمی به شما نزدیک‌اند همراه شوید. در این بخش، علاوه بر المپیاد ریاضی، مطالبی دربارهٔ المپیاد کامپیوتر هم خواهید خواند.

«از گذشته‌ها» اغلب شامل دو نوع موضوع است: مطالبی در مورد تاریخ ریاضیات جهان، و مطالبی دربارهٔ مجلات ریاضی در ایران؛ از آن روز که بوده‌اند تا امروز.

امیدواریم ماهنامه را بپسندید. اگر این اتفاق فرخنده رخ داد، آن را به دیگران هم معرفی کنید. در ضمن، اگر فرصت کردید برایمان نامه هم بنویسید و نظرتان را دربارهٔ قسمت‌های مختلف ماهنامه بگویید. پیشاپیش متشکریم.

ا. ن.

لطفاً به کسی نگویید، به روی خودتان هم نیاورید: ویراستاری، فقط غُر زدن برای سرهم و جدا نوشتن و خط خطی کردن نوشته‌های دیگران نیست! گه‌گاه، باید اشتباه‌هایت را هم ــ شده یواشکی و در گوشی! ــ بگویی. واقعیت این است که برای شمارهٔ قبل، «دویدیم» که سرِ وقتی حاضر باشد. حالا که سر فرصت نگاه می‌کنم و، از شما چه پنهان، «دوستان» هم فرصت «سر فرصت نگاه کردن» پیدا کرده‌اند، «چیز»هایی که دفعهٔ پیش از زیر دستم «در رفتند» به چشمم می‌آیند. صورت درست بعضی از این اشتباه‌ها از متن مشخص است؛ مثلاً برایتان نمی‌گویم که در سطر چهارم صفحهٔ ۶، «$N\varepsilon^2$» را به «$M\varepsilon^2$» تبدیل کنید یا در همان صفحه، زیر شکل، $S^{r\varepsilon}(B)$ و $S_{r\varepsilon}(B)$ درستند یا ته سطر یکی مانده به آخر برهان لم ۴ صفحهٔ ۲۲، «باید دارای $\phi(mn)$ عضو باشد» است. این که در آخرین سطر برهان لم ۵ هم اعدادی که «نسبت به p^α اول نیستند» ــ و نه آنها که نسبت به p اول نیستند ــ «p، $2p$، ...، $p^{\alpha-1}p$» هستند گفتن ندارد و تازه، آخر برهان قضیهٔ ۳(صفحهٔ ۲۴) هم $\sum_{d|n}\phi(d)$ درست است. شما هم لطف کنید و به کسی نگویید که جای شکل پایین صفحهٔ ۲۶ و شکل بالای صفحهٔ ۲۷ را باید عوض‌کرد؛ یا مثلاً دو خانهٔ ۳ و ۴ از بلوک 2×2 شکل پایین صفحهٔ ۴۴ نباید نقطه‌چین می‌شدند و یا این که اصلاً مسألهٔ همان مقاله این است که «مهره‌هایی با این خاصیت داریم که ... تهدید می‌کند» و نه «نمی‌کند» و به‌علاوه، BC آخر سطر اول اولین مسألهٔ المپیادی را هم به DC تبدیل کنید. حالا لطفاً این «دو اشتباه» را درست کنید: در مسألهٔ اول جبر و احتمال(صفحهٔ ۳۳)، «افراز» درست نیست. در واقع، «دو زیرمجموعهٔ جدا از هم موجودند که». در شرح بازی شش گوشه هم، لازم نیست که بازی‌کن مهرهٔ بعدیش را «در یکی از خانه‌هایی که با خانهٔ قبلی ضلع مشترک داشته باشد» بگذارد. حواستان که هست: این که «ریاضی» عنوان «آمادگی برای المپیاد ریاضی» افتاده بود، خوب؛ البته، «غلط» که **نیست** ...!

ب. ح.

آشنایی با نظریهٔ گره‌ها

هیربد آسا

مقدمه

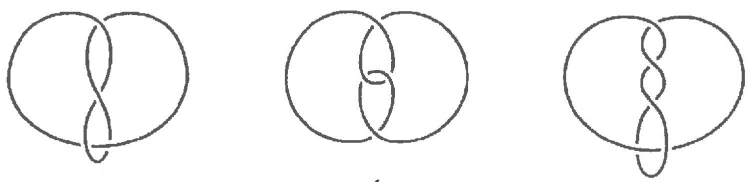
یک تکه نخ بردارید، یک گره معمولی به آن بزنید و دو سر آن را به‌هم بچسبانید. نتیجه، یک نخ است که دیگر انتهایی ندارد و به‌صورت یک حلقه گره خورده است. در این صورت هیچ راهی برای باز کردن آن وجود ندارد.

گره، حلقه‌ای‌ست مانند بالا؛ جز این که ضخامت ندارد.

نمونهٔ سادهٔ یک گره که به گره شبدری شهرت یافته است

از نظر ریاضی(و به‌طور دقیق‌تر)، گره خمی بسته در فضای سه بعدی است که خود را هیچ جا قطع نکند. ساده‌ترین نوع گره، دایره است که به آن گره بدیهی می‌گویند. دومین گره ساده، شبدری نام دارد که در شکل نشان داده شده. واضح است که دایره و گره شبدری دو گره مجزا هستند. تلاش برای بازکردن شبدری که در بالا نشان دادیم، بدون پاره کردن نخ به شکست می‌انجامد و این همان خاصیت جالب توجه آن است.

یک گره ممکن است به صورت‌های مختلف ظاهر شود: در شکل زیر، گره موسوم به نوع هشت با سه ظاهر متفاوت نشان داده شده است که البته با کمی تلاش می‌توان به راحتی از یکی به دیگری رسید.



سه تصویر از گره نوع هشت

محل تقاطع دو نخ را تقاطع می‌گویند. شمردن تقاطع‌ها مسألهٔ مهمی است. تعداد تقاطع‌های هرگره را برابر حداقل تعداد آنها در تصویرهای مختلف گره می‌گیریم؛ مثلاً در نوع هشت، در تصویر سمت راست پنج تقاطع مشاهده می‌شود، در حالی که در تصویر وسط و چپ چهار تقاطع وجود دارد و چون تصویری از گره نوع هشت نمی‌توان یافت که کمتر از چهار تقاطع داشته باشد، گره نوع هشت چهار تقاطع دارد.

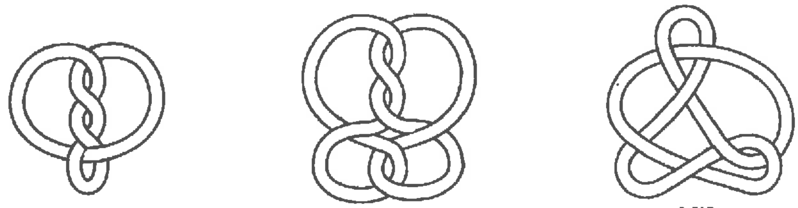
تعداد تقاطع‌ها تا حدودی در تمییز گره‌ها کمکمان می‌کند؛ زیرا اگر دو گره دارای تقاطع‌های نابرابر باشند آنگاه دو گره نیز با هم برابر نیستند. عکس این مطلب درست نیست؛ یعنی گره‌های متفاوتی با تعداد تقاطع‌های برابر وجود دارند.

قسمت اعظم نظریهٔ گره‌ها به تشخیص این که کدام دو گره مجزایند یا کدام دو گره (به ظاهر متفاوت) برابرند اختصاص دارد. در سال

ریاضیات شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص ۶ـ۳

۱۹۶۱، ولفگانگ هاکن[1] روشی ارایه داد که بر اساس آن اگر طرح گره(که این طرح به طریقی خاص برای کامپیوتر مشخص می‌شود) را به کامپیوتر بدهیم، می‌توان فهمید که گره بدیهی است یا نه.

از نظر تاریخی، آغاز نظریهٔ گره‌ها به قرن نوزدهم باز می‌گردد. در سال ۱۸۸۰ میلادی، باور بر این بود که فضا توسط چیزی به نام «اتر» پر شده است. در تلاش برای توضیح تفاوت گونه‌های مواد، لُرد کلوین[2] فرض کرد که اتم‌ها صرفاً گره‌هایی در ساختمان اتر هستند و گره‌های متفاوت، مربوط به مواد مختلف می‌شوند. این امر، فیزیکدانی اسکاتلندی به نام پیتر گوترای تیت[3] را متقاعد کرد که اگر بتواند جدولی از گره‌های ممکن را تهیه کند، جدولی از عناصر را خواهد یافت. او سال‌ها روی این موضوع کار کرد. هم‌زمان، یک ریاضیدان آمریکایی به نام لیتل[4] به این موضوع پرداخت.

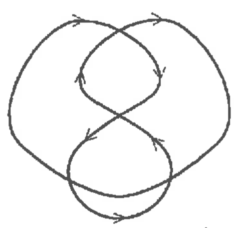


He? Pb? Ni?

مدل‌هایی که برای ساختمان اتم‌ها در پایان قرن نوزدهم ارایه شد، این نظریه را رد کرد. علم شیمی بیش از صد سال گره‌ها را به فراموشی سپرد؛ ولی در ۱۹۸۰ میلادی، علم بیوشیمی گره‌های موجود در DNA را کشف کرد.

نظریهٔ گره‌ها قسمتی از توپولوژی است. توپولوژی در مورد خاصیت‌های هندسی‌ای که تحت تغییر فرم پیوستهٔ شکل ثابت می‌مانند بحث می‌کند؛ دربارهٔ خواصی مثل تعداد تقاطع‌ها(یا حداقل تقاطع‌های) یک گره.

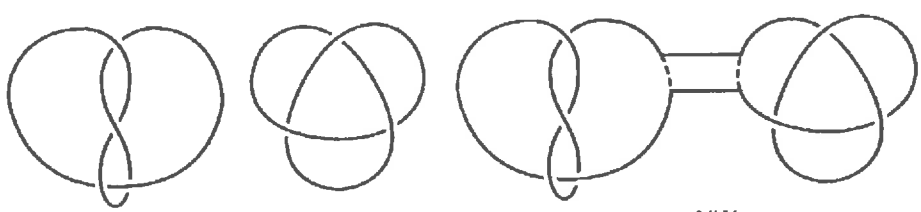
بعضی از گره‌ها از اهمیت بیشتری برخوردارند؛ از جمله گره‌های متناوب. در جهتی مشخص روی تصویر گره شروع به حرکت کنید. اگر بتوانید به اولین تقاطع که رسیدید از زیر آن عبور کنید و به دومین تقاطع که رسیدید از روی آن بگذرید و در سومی از زیر و به همین ترتیب متناوباً از زیر و روی تقاطع‌ها عبور کنید، به گره متناوب می‌گویند؛ مثل گره نوع هشت.



فلش جهت حرکت را نشان می‌دهد که به طور یک در میان از رو و زیر تقاطع‌ها عبور می کنیم

ترکیب گره‌ها

می‌توان به‌وسیلهٔ دو تصویر از دو گره، گرهی جدید ساخت؛ به‌این ترتیب که از هر کدام یک قوس کوچک را طوری حذف می‌کنیم که هیچ تقاطعی از بین نرود و سپس، سرهای نخ‌ها را به هم وصل می‌کنیم.



J K $J\#K$

از ترکیب دو گره، گره جدیدی به‌دست می‌آید؛ ولی آیا عکس این موضوع صادق است؟ یعنی آیا می‌توان هر گره را حاصل جمع دو گره نابدیهی دانست؟ هر گرهی که نتوانیم آن را به صورت حاصل جمع دو گره دیگر بنویسیم، گره اول نامیده می‌شود؛ مانند آنچه در اعداد رخ می‌دهد. پس در واقع کار اصلی ما یافتن گره‌های اول نابرابر و رده‌بندی آنهاست. گره‌های شبدری و نوع هشت اول هستند و ترکیب

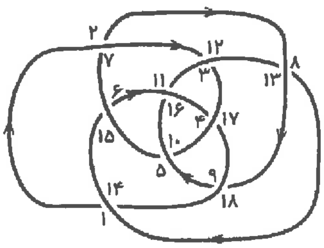
---

1) Wolfgang Haken 2) Lord Kelvin 3) Peter Guthrie Tait 4) N. C. Little

هر گره با گره بدیهی خودش می‌شود. حال سؤال جالب توجه این است که آیا گره بدیهی مرکب است؟ البته که نه؛ زیرا اگر گره بدیهی را می‌توانستیم به صورت حاصل جمع دو گروه غیر بدیهی بنویسیم، دیگر گره اولی وجود نداشت: در چنین وضعی، مثلاً، گره شبدری را به صورت ترکیب گره بدیهی و گره شبدری می‌توان نوشت و بنا بر فرضی که در بالا شده، قسمت بدیهی به حاصل جمع دو گره غیر بدیهی تجزیه می‌شود؛ لذا گره شبدری ترکیبی از این دو گره شبدری است. تفاوت اصلی ترکیب گره‌ها با ضرب اعداد صحیح این است که ترکیب دو گره ممکن است به طرق مختلف صورت گیرد و گره‌های مرکب حاصل با هم متفاوت باشند.

روش داوکِر[1] برای نشان‌گذاری گره‌ها

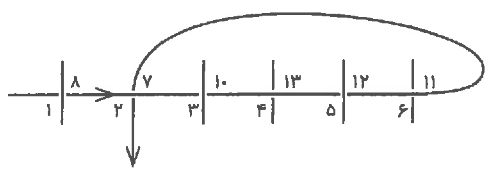
در این روش ابتدا از یک گره متناوب شروع می‌کنیم. ابتدا یک جهت روی گره انتخاب کنید، بعد یک تقاطع را با عدد ۱ شماره گذاری کنید و سپس، در جهت مشخص‌شده حرکت کنید (فرض کنید در تقاطع اول از زیر می گذریم). به هر تقاطع که رسیدیم عدد بعدی را به‌آن نسبت می‌دهیم تا همهٔ تقاطع‌ها دارای یک جفت عدد(یکی زوج و یکی فرد) شوند و به‌این ترتیب، دنباله‌ای از جفت‌ها به‌دست می‌آوریم.



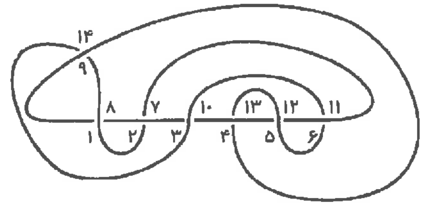
$$\begin{cases} ۱ \quad ۳ \quad ۵ \quad ۷ \quad ۹ \quad ۱۱ \quad ۱۳ \quad ۱۵ \quad ۱۷ \\ ۱۴ \quad ۱۲ \quad ۱۰ \quad ۲ \quad ۱۸ \quad ۱۶ \quad ۸ \quad ۶ \quad ۴ \end{cases}$$

برای سادگی بیشتر فقط (۴، ۶، ۸، ۱۶، ۱۸، ۲، ۱۰، ۱۲، ۱۴) را در نظر می‌گیریم؛ زیرا از چپ به راست به ترتیب متناظر اعداد فرد متوالی هستند.

حال بر عکس مثلاً دنبالهٔ (۴، ۶، ۱۴، ۲، ۱۲، ۱۰، ۸) را در نظر بگیرید؛ می‌خواهیم گره متناظر با آن را به‌دست آوریم. برای این منظور یک امتداد را در نظر بگیرید با یک تقاطع. عدد ۱ و ۸ که متناظر با عدد ۱ است را به تقاطع نسبت دهید. بعد در طول امتداد پیش روید و یک تقاطع دیگر بسازید و اعداد ۲ و ۱۰ را به آن نسبت دهید. این کار را تا جایی ادامه دهید که به عددی برسیم که قبلاً در امتداد آمده است؛ پس باید برگردیم. حال این سؤال پیش می‌آید که از بالا یا از پایین برگردیم. برای لحظه‌ای این اشکال را نادیده بگیرید و از بالا برگردید. توجه به این نکته مهم است که چون گره را متناوب در نظر گرفتیم، تقاطع‌ها باید طوری باشد که به طور یک در میان از زیر و روی تقاطع‌ها در امتداد حرکت بگذریم.

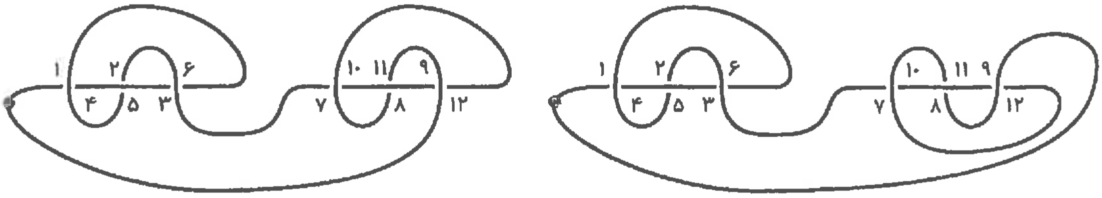


حال به عدد ۷ رسیدیم که قبلاً در امتداد آمده‌بود و از بالا دور زدیم و به عدد ۷ رفتیم. حال در این امتداد جدید کار را ادامه می‌دهیم. مانند قبل اگر به عددی که قبلاً تکرار شده بر نخوردیم تقاطع‌های جدید می‌سازیم و در صورت یافتن عدد تکراری دور می‌زنیم تا گره به‌دست آید.

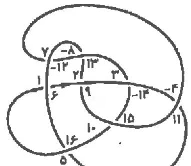


1) Dowker

حال برگردیم به مشکل قبلی؛ یعنی برگشتن از بالا یا از پایین. مثلاً دنبالهٔ (۸، ۱۲، ۱، ۲، ۶، ۴) دارای دو تصویر با دو حالت برگشت از بالا و از پایین است.



این مشکل از اینجا ناشی می‌شود که دنبالهٔ این گره را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد که کاملاً(به مفهوم خاص) از هم مجزایند؛ مثلاً $\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۴ & ۶ & ۲ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۷ & ۹ & ۱۱ \\ ۱۰ & ۱۲ & ۸ \end{pmatrix}$. پس اگر در دنبالهٔ یک گره به چنین مشکلی برخورد نکنیم می‌توان از دنبالهٔ آن تصویر گره(یا تصویر گره که در آینه به آن نگاه می‌کنیم) را به‌دست آورد. یک راه خوب برای برطرف کردن این مشکل برای گره فوق، در نظر گرفتن تصویر گره روی یک کره به جای صفحه است؛ زیرا در این صورت صفحه دارای زمینه‌ای متناهی خواهدبود ولی صفحهٔ معمولی نامتناهی است.



حال می‌خواهیم روشی برای یافتن دنباله برای تمام گره‌ها ارایه دهیم. برای این منظور اعداد زوج دنباله را با علامت در نظر می‌گیریم؛ یعنی دوباره مانند بالا به یک تقاطع عدد ۱ را نسبت می‌دهیم(از زیر تقاطع شروع می‌کنیم) و پیش می‌رویم. اگر در جایی که باید عدد زوج نسبت دهیم از زیر تقاطع گذشتیم، عدد زوج را با علامت منفی در نظر بگیرید.

دیگر علوم

دانشمندان علوم دیگری مثل زیست شناسی، شیمی و فیزیک نیز به این نظریه دلبستگی یافته‌اند. در سال ۱۳۶۷ هجری شمسی، دو فیزیکدان به نام‌های روولی و اسمولین متوجه نکتهٔ جالبی در تعبیر تازهٔ فیزیکدان دیگری به نام آشنکار از معادله‌های اینشتاین شدند. روولی پیشنهاد کرد حاصل معادله‌های آشنکار با چندجمله‌ای‌های مربوط به گره‌های مختلف(معادله‌هایی که گره‌های مختلف را توصیف می‌کند) ترکیب شود. حاصل ترکیب، به‌خصوص برای دسته‌ای از گره‌ها که پیوند نام دارند و به‌صورت دایره‌ای باز و متصل به هم هستند، مطلوب در آمد. این معادله‌های آمیختهٔ گره‌ها قادر به توضیح گرانش در همهٔ فاصله‌ها بودند و ضمناً به یک مدل فیزیکی از فضا مربوط می‌شدند؛ مدلی شبیه به «بافته»ای که روولی با اتصال صدها حلقه کلید ساخته که هرکدام به چندتا از حلقه‌های مجاور وصلند. اگر نظر روولی و همکارانش درست باشد، فضا مثل یک زره سه‌بعدی است که تماماً از حلقه تشکیل شده‌باشد. هر اتصال به منزلهٔ حلقه‌ای از فضاست که قطرش ابعادی در مقیاس $۱۰^{-۳۳}$ دارد. ابعاد فوق‌العاده کوچک این حلقه‌ها سبب می‌شود که فضا، حتی در ابعاد اتمی، پیوسته به نظر آید. روولی می‌گوید مدل حلقه‌ای حتی توضیح ملموسی برای گرانش دارد: وقتی دو جسم به هم نزدیک می‌شوند، تعداد پیوندهایشان در فضا بیشتر می‌شود یا هر حلقه با تعداد بیشتری از حلقه‌های مجاور اتصال پیدا می‌کند.

در علم شیمی نیز دانشمندان سعی در ساختن مولکول‌هایی کردند که ساختمانشان به شکل گره است. در سال ۱۳۶۸ هجری شمسی برای اولین بار ترکیب گره‌داری ساخته‌شد که مولکول ۱۲۴ اتمی آن به شکل گره شبدری بود.

مراجع

[1] Colin Conrad Adams, *The knot book*. W. H. Freeman and Company, 1994.

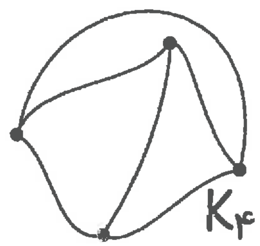
[۲] محمد باقری(مترجم)، گره‌های مشکل‌گشای ریاضی، مجلهٔ دانشمند. سال سی و دوم، شمارهٔ ۱۰(دی ۱۳۷۳).

شاخص اویلر (قسمت اول)

امید نقشینه ارجمند

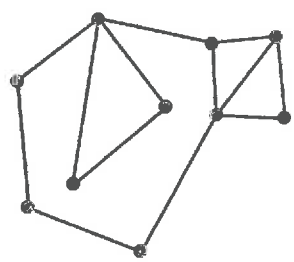
گراف‌های مسطح

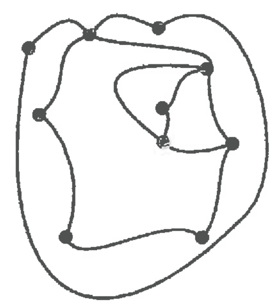
آیا هیچ‌گاه سعی کرده‌اید پنج نقطه روی صفحه را دو به دو با مسیرهایی طوری به هم وصل کنید که هیچ دو مسیری هم را قطع نکنند؟ اگر این کار را نکرده‌اید، امتحان کنید(البته، موفق نخواهید شد!)



در این مقاله می‌خواهیم خواصی از گراف‌های مسطح را ثابت کنیم. گراف مسطح، گرافی است که بتوان آن را طوری روی صفحه رسم کرد که هیچ دو یالی همدیگر را قطع نکنند؛ به عنوان مثال، K_4(گراف کامل چهار رأسی) مسطح است.

فرض کنید G گرافی مسطح باشد؛ در این صورت برای رسم G روی صفحه راه‌های بسیاری وجود دارد. شکل زیر، دو روش مختلف برای رسم یک گراف را نشان می‌دهد.





شما هم گراف بالا را به چند شکل دیگر رسم کنید. اگر کمی دقت کنید، متوجه نکتهٔ جالبی خواهید شد: هرگاه گرافی روی صفحه رسم شود، صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کند؛ به عنوان مثال، K_4 ای که در ابتدای مقاله دیدید صفحه را به چهار قسمت تقسیم کرده است. دو گراف بعدی، که در واقع تصویر یک گراف هستند، صفحه را پنج قسمت کرده‌اند. اگر این گراف را به روش دیگری رسم کنید، نتیجه تغییری نخواهد کرد.

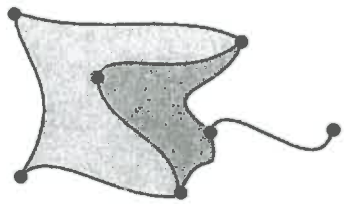
آنچه از این پس می‌خواهیم ثابت کنیم، قضیه‌ای است که یکی از نتایج آن، این است: تعداد ناحیه‌ها مستقل از نحوهٔ رسم است.

یک یال اضافه و کم کنید!

گراف صفحهٔ بعد را ــ که روی صفحه رسمش کرده‌ایم ــ در نظر بگیرید.

مکتب ریاضیات شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص ۹ــ۷

تعداد ناحیه‌ها ۳ تا است. واضح‌است که می‌توان یال‌های دیگری هم طوری به این گراف اضافه کرد که همچنان مسطح بماند. این کار را انجام بدهید. تعداد ناحیه‌ها چه تغییری می‌کند؟

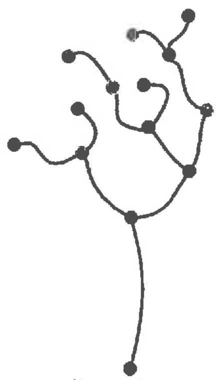


همین گراف را در نظر بگیرید و یکی از یال‌های آن را حذف کنید. آیا تعداد ناحیه‌ها یکی کم می‌شود؟ همهٔ یال‌ها را امتحان کنید. خواهید دید که در بعضی موارد تعداد ناحیه‌ها تغییر نمی‌کند. آیا می‌توانید بگویید در چه وضعیتی تعداد ناحیه‌ها کم نمی‌شود؟

درخت، کوچک‌ترین گراف همبند

فرض کنید G یک گراف باشد(نه لزوماً مسطح). می‌گوییم G همبند **است** اگر از هر رأس آن بتوان با عبور از چند یال به هر رأس دیگر رفت.

گراف همبندی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بعضی از یال‌های آن را حذف کنیم با این شرط که همبند بماند. این کار را احتمالاً به بیش از یک روش می‌توان انجام داد؛ ولی در هر صورت، نتیجه نهایی گرافی است که به‌آن درخت می‌گوییم. درخت، **گرافی** است که بین هر دو نقطهٔ آن دقیقاً یک مسیر وجود دارد.



این یک درخت است؛ البته در زمستان!

قضیه ۱. *یک گراف n رأسی درخت است اگر و تنها اگر همبند باشد و $n - 1$ یال داشته باشد.*

برای اثبات قضیهٔ ۱، احتیاج به یک لم ساده داریم. منظور از درجهٔ یک رأس تعداد یال‌های متصل به آن است.

لم ۱. *اگر G درختی با بیش از یک رأس باشد آنگاه حداقل یک رأس با* **درجهٔ ۱** *دارد.*

برهان. فرض کنید این طور نباشد؛ پس درجهٔ هر رأس G بزرگتر یا مساوی ۲ است. از یک رأس شروع به حرکت کنید و به رأس دیگری بروید(این کار ممکن است؛ چون درجهٔ هیچ رأسی صفر نیست). این حرکت را ادامه دهید و هر بار از روی یالی حرکت کنید که قبلاً از آن نیامده‌اید(به یاد داشته باشید که درجهٔ هر رأس حداقل ۲ است). با توجه به این‌که تعداد رأس‌ها متناهی است، در این حرکت بالاخره رأسی تکرار می‌شود؛ پس G شامل یک دور است و این نتیجه می‌دهد که بین حداقل دو تا از رأس‌های G، بیش از یک مسیر وجود دارد که خلاف فرض لم است. ∎

برهان. (قضیهٔ ۱). ابتدا با استقرا نشان می‌دهیم که هر درخت n رأسی، $n - 1$ یال دارد. این مطلب برای $n = 1$ واضح است. فرض کنید $n > 1$ و حکم برای گراف‌های $n - 1$ رأسی درست باشد. اگر G درختی n رأسی باشد، طبق لم ۱، رأسی با درجهٔ ۱ دارد. اگر این رأس و یال متصل به آن را حذف کنیم، نتیجه درختی $n - 1$ رأسی می‌شود که تعداد یال‌های آن یکی کمتر از G است. طبق فرض استقرا، این درخت $n - 2$ یال دارد؛ پس G، $n - 1$ یال دارد.

اکنون نشان می‌دهیم که هر گراف همبند n رأسی با $n - 1$ یال، درخت است. (برهان خلف) توجه کنید که اگر G درخت نباشد، بین دو رأس آن بیش از یک مسیر وجود دارد. اگر یکی از یال‌های یکی از این دو مسیر را حذف کنیم، نتیجه گرافی همبند است با $n - 2$ یال. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا به یک درخت برسیم. طبق فرض خلف، درخت حاصل، که n رأس دارد، کمتر از $n - 1$ یال دارد و این با آنچه در ابتدا ثابت کردیم سازگار نیست. ∎

درخت‌ها خاصیت دیگری هم دارند. هر درخت، به وضوح، گرافی مسطح است که با رسم آن تعداد ناحیه‌ها در صفحه ۱ خواهد بود. اکنون برای اثبات قضیهٔ جالب زیر کاملاً آماده‌ایم.

قضیه ۲ . *فرض کنید G گرافی مسطح و همبند با n رأس و e یال باشد. در هر ترسیم آن، تعداد ناحیه‌ها ــ که با f نشانش می‌دهیم ــ مقدار ثابتی است و داریم $f = e - n + ۲$.*

برهان. روی $e - n + ۲$ استقرا می‌زنیم. توجه کنید که با توجه به همبند بودن گراف مورد نظر، $e \geq n - ۱$؛ پس $e - n + ۲ \geq ۱$.

اگر $e - n + ۲ = ۱$ آنگاه $e = n - ۱$ و در نتیجه طبق لم ۱ گراف مورد نظر درخت است.

فرض کنید $m \geq ۱$ و حکم برای $e' - n' + ۲ = m - ۱$ درست باشد. G گرافی مسطح n رأسی با e یال است و $e - n + ۲ = m$. G را رسم کرده‌ایم و f ناحیه به‌وجود آمده است . توجه کنید که $e \geq n - ۱$ پس G درخت نیست و با توجه به همبند بودن می‌توان یالی از آن را حذف کرد که نتیجه همبند بماند. با این کار به گرافی مثل G' می‌رسیم که n رأس و $e - ۱$ یال دارد و طوری روی صفحه رسم شده که $f - ۱$ ناحیه به وجود آورده است. $(e - ۱) - n + ۲ = m - ۱$ پس طبق فرض استقرا $f - ۱ = (e - ۱) - n + ۲$ و در نتیجه $f = e - n + ۲$. ■

اکنون چیزی که در ابتدا گفته بودیم ثابت شده است؛ یعنی تعداد ناحیه‌ها مستقل از روش رسم است. حال با کمک این قضیه می‌خواهیم ثابت کنیم $K_۵$ (گراف کامل ۵ رأسی) مسطح نیست.

لم ۲ . *اگر G گرافی مسطح ، n رأسی و e یالی باشد که $n > ۲$ آنگاه $e \leq ۳n - ۶$.*

برهان. ابتدا آنقدر یال به G اضافه می‌کنیم که همبند بماند و دیگر نتوان یالی به آن اضافه کرد. در چنین شرایطی هر ناحیهٔ گراف جدید (G') سه ضلع دارد؛ زیرا در غیر این صورت، می‌توان یال دیگری به G' اضافه کرد که باز مسطح بماند.

تعداد رأس‌های G و G' برابر است و اگر تعداد یال‌های G' را با e' نشان دهیم، داریم $e' \geq e$. f' را تعداد ناحیه‌های G' می‌گیریم؛ پس $۲e' = ۳f'$ (چرا؟). حال از قضیهٔ ۲ استفاده می‌کنیم: چون $f' = e' - n + ۲$، داریم $۲e' = ۳f' = ۳e' - ۳n + ۶$ که یعنی $e' = ۳n - ۶$. از طرفی می‌دانیم $e \leq e'$؛ پس $e \leq ۳n - ۶$. ■

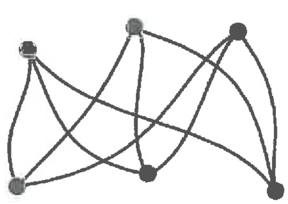
قضیه ۳ . *$K_۵$ مسطح نیست.*

برهان. توجه کنید که در $K_۵$، $n = ۵$ و $e = \binom{۵}{۲} = ۱۰$ و داریم $e = ۱۰ > ۹ = ۶ - ۳n$. ■

در پایان، لازم است مسطح نبودن یک گراف دیگر را هم ثابت کنیم. $K_{۳,۳}$ گرافی شش رأسی است که رأس‌هایش در دو دستهٔ سه تایی قرار دارند. دو رأس به هم متصل هستند اگر در یک دسته نباشند.

قضیه ۴ . *$K_{۳,۳}$ مسطح نیست.*

برهان. فرض کنید که $K_{۳,۳}$ یک گراف مسطح باشد؛ در این صورت $f = ۹ - ۶ + ۲ = ۵$. توجه کنید که $K_{۳,۳}$ شامل هیچ دوری به طول سه نیست؛ پس هر طور که رسم شود، ناحیه‌ها حداقل چهار یال دارند و در هر ناحیه می‌توان یک یال دیگر را طوری به گراف اضافه کرد که مسطح بماند. با این کار به گراف مسطحی می‌رسیم که شش رأس و $۹ + ۵ = ۱۴$ یال دارد؛ اما $e' = ۱۴ > ۱۲ = ۳n - ۶$ و این خلاف لم ۲ است. ■



$K_{۳,۳}$

جبر «خطی»

بردیا حسام

مقدمه

فرض‌کنید که می‌خواهیم «خط» در $\mathbb{R}^n$ را به‌طور مقدماتی‌ای تعریف کنیم. چه تعریفی مناسب است؟ اصلاً در چنین موردی، «مناسب بودن» چه معنایی دارد؟ یک جواب این‌است: تعریفی [برای خط] «مناسب» است که مصداق‌هایش در حالت‌های خاص بعدهای نابیشتر از سه، همان خط‌های آشنای صفحه و فضا باشند؛ پس مثلاً اگر [فقط با نگاه به $\mathbb{R}^2$] بگوییم که «خط مجموعه‌ای از نقاط است که از انتقال همهٔ نقاطی از فضا که بر بردار ثابتی عمودند به‌دست آمده»[1] کار چندان جالبی نکرده‌ایم؛ چون برای $n = 3$ این مجموعه را «صفحه» می‌گوییم. به همین صورت، اگر با نگاه به $\mathbb{R}^3$ مجموعهٔ مصداق این تعریف را صفحه بنامیم هم کارمان جالب نیست: در $\mathbb{R}^2$، این مجموعه‌ها «خط» هستند.

خوش‌بختانه، تعریف «مناسب» خط سرراست است: بردار [ناصفر] $\mathbf{v}$ را درنظر بگیرید و بردار دل‌خواه $\mathbf{a}$ را؛ مجموعهٔ همهٔ نقاط به‌شکل $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$ که t عددی حقیقی‌ست را «خط گذرا از $\mathbf{a}$ موازی با $\mathbf{v}$» می‌گوییم. حالا به‌راحتی می‌توانیم «خط» را تعریف کنیم: مجموعه‌ای مثل $\mathcal{L}$ از نقاط صفحه را «خط» می‌گوییم اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{v}$ باشند که $\mathcal{L}$ همان مجموعهٔ $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$ هاــ به‌ازای همهٔ t های حقیقی ــ باشد. شبیه همین تعریف را برای صفحه می‌توان گفت: اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار [نا هم‌خط] باشند و $\mathbf{a}$ برداری دل‌خواه، «صفحهٔ گذرا از $\mathbf{a}$ و موازی با $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$» همان $\{\mathbf{a} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$ است. تعریفمان برای $n = 1$ هیچ مصداقی ندارد، برای $n = 2$ همهٔ $\mathbb{R}^2$ است(ثابت کنید!) و برای $n = 3$ با مختصر زحمتی همان تعریف معمول است؛ کافی‌ست که $\mathbf{N}$ را ــ بردار قائم بر صفحه را ــ برابر $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ بگیریم.

چه وجه مشترکی بین خط و صفحه ــ با این تعریف‌ها ــ وجود دارد؟ انتقالی ثابت و عبارتی به‌شکل «مجموعی از مضرب‌های بردارهایی ثابت». جالب‌تر این که مجموعه‌هایی مشابه این مجموعه‌ها فراوان یافت می‌شوند؛ مثلاً $\mathbb{R}^4$ را ــ به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ چهارتایی های مرتب از اعداد حقیقی ــ در نظر بگیرید، انتقال یافتهٔ مجموعهٔ همهٔ بردارهایی که بر بردار ثابتی عمودند دیگر «صفحه» نیست، اما شباهت قابل توجهی به همان مجموعه‌ها دارد: مجموعهٔ همهٔ $\mathbf{a} + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$ هایی که $\mathbf{a}$، $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهایی ثابتند و r و s و t متغیرهایی حقیقی. از این به بعد، به دلایل عملی، انتقال ثابت را هم درنظر نمی‌گیریم؛ پس همیشه مجموعه‌ای «ناتهی» از بردارهای ثابت را می‌گیریم و با «مجموع‌های مضارب حقیقی» آنها کار می‌کنیم(این «ناتهی بودن» در همهٔ بخش‌های بعدی از مفروضاتمان خواهد بود، پس هر بار تکرارش نمی‌کنیم). هر مجموعه از این نوع را ــ فعلاً فقط برای متمایزکردن از باقی زیرمجموعه‌های فضا ــ «زیرفضای خطی» می‌نامیم و در بندهای بعدی، این عنوان را توجیه می‌کنیم.

زیرفضاهای خطی را چه خاصیتی مشخص می‌کند؟ یک خاصیت ساده و آشنا: اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در زیرفضا باشند، همهٔ $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ ها هم ــ برای همهٔ t های حقیقی ــ هستند. آیا این شرط ــ که برای هر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در زیرفضا، نقاط «خط» گذرا از $\mathbf{a}$ و موازی $\mathbf{b}$ هم در آن باشند ــ کافی هم هست؟ به‌عبارت دیگر، اگر شرط در مورد زیرمجموعه‌ای از فضا ــ و نه لزوماً «زیرفضایی از فضا» ــ صادق

۱) این تعریف، با وجود پیچیدگی ظاهریش، درست همان است که می‌شناسیمش: فرض کنید که $\mathbf{n}$ آن بردار ثابت باشد و $\mathbf{a}$ بردار انتقال. «خط» این تعریف $\{\mathbf{a} + \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0\}$ یا معادلاً $\{\mathbf{r} \mid (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0\}$ است که چیزی جز $\{\langle x, y\rangle \mid ax + by = c\}$ به‌ازای $\mathbf{a} = \langle a, b\rangle$ و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = c$ نیست.

شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص ۱۵ــ۱۰

باشد، حتماً مجموعه‌ای [متناهی] از بردارهای فضا موجود است که زیرمجموعه‌مان همان فضای خطی تولید شده با آن بردارها ــ یعنی مجموعهٔ همهٔ مجموع‌های مضارب حقیقی آن بردارها ــ باشد؟ از زاویه‌ای دیگر: چه نوع تابع‌هایی برای کار با فضاهای خطی مناسبند؟ هدف بخش‌های بعدی، جواب دادن به این [نوع] سؤال‌هاست.

زیرفضاهای خطی

در این بخش، هدفمان اثبات کافی بودن شرطمان است؛ یعنی می‌خواهیم ثابت‌کنیم که $V \subseteq \mathbb{R}^n$ زیرفضای خطی است، اگر برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ و هر $t \in \mathbb{R}$، $\mathbf{a} + t\mathbf{b} \in V$. برای ساده‌تر کردن نوشتنمان، $\{\mathbf{a} + t\mathbf{b} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ را $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ می‌نامیم؛ پس شرطمان این‌است که «برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$، $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq V$». از این به بعد، اگر S مجموعه‌ای از بردارها باشد که هر عضو V را بتوان به‌صورت ترکیب خطی تعدادی از اعضای S نوشت می‌گوییم «V زیرفضای تولیدشده به‌وسیلهٔ S است» (یا معادلاً، «S مجموعهٔ مولد V است») و می‌نویسیم $V = \langle S \rangle$؛ پس برای اثبات حکممان باید پیِ S متناهی‌ای باشیم که $V = \langle S \rangle$.

استقلال و بستگی خطی

احتمالاً اولین سؤال این است که آیا Sای هست که $V = \langle S \rangle$؟ این سؤال، جوابی بدیهی دارد: همیشه، $V = \langle V \rangle$(ثابت کنید!). اما V مولد جالبی نیست، چون می‌توانیم S های کوچک‌تری هم پیدا کنیم؛ به‌عنوان یک نمونهٔ ساده، چون $\mathbf{0} = \circ \cdot \mathbf{a}$، $S = V - \{\mathbf{0}\}$ هم مولدی برای V است. با کمی تلاش، می‌توانیم S های کوچک‌تری هم پیدا کنیم؛ مثلاً اگر $\mathbf{a}$ برداری در S باشد، می‌توانیم از کل خط موازی $\mathbf{a}$ ، فقط خود $\mathbf{a}$ را در S بگذاریم و باقی را کنار بگذاریم.

چه چیز مشترکی بین دو مثالمان برای کوچک کردن S وجود دارد؟ هربار، عضوهایی از S را که با عضوهای دیگر S و عمل‌های جبری قابل تولید بودند کنار گذاشتیم. از این دیدگاه، وقتی S به «کوچک‌ترین اندازه»ی ممکن می‌رسد که هیچ عضوی از آن قابل ساختن با باقی اعضای S و اعمال جبری‌مان «نباشند». چنین مجموعه‌هایی از بردارها را «مستقل خطی» می‌گوییم.

لم ۱. *مجموعه‌ای مثل S از بردارها مستقل خطی‌ست اگر و تنها اگر برای هر عدهٔ متناهی از بردارهای S مثل $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$، اگر $t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ آنگاه $t_1 = \cdots = t_n = \circ$.*

برهان. اگر $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S$ و $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ باشند که $t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ و دست‌کم یکی از t ها ــ مثلاً t_i ــ ناصفر باشد آنگاه $\mathbf{v}_i = (-t_1/t_i)\mathbf{v}_1 + \cdots + (-t_{i-1}/t_i)\mathbf{v}_{i-1} + (-t_{i+1}/t_i)\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + (-t_n/t_i)\mathbf{v}_n$؛ یعنی $\mathbf{v}_i$ ترکیبی خطی از اعضای دیگر S است و در نتیجه S مستقل خطی نیست. به‌عکس، اگر $\mathbf{u} \in S$ ترکیبی خطی از اعضای S باشد، بردارهایی مثل $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ در S و اعداد حقیقی $t_1, \ldots, t_n$ هستند که $\mathbf{u} = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n$؛ یا $(-1)\mathbf{u} + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. ■

با این حساب، تعریف «جدید»مان معادل همان تعریف آشنای استقلال خطی‌ست.

اگر S مولدی مستقل خطی برای V باشد، S را «پایه برای V» می‌نامیم؛ پس درواقع، پایه از طرفی «کوچک‌ترین مجموعهٔ مولد» است و از طرف دیگر «بزرگ‌ترین مجموعهٔ مستقل خطی». دیدیم که هر فضای برداری مولد دارد. سؤال طبیعی‌ای که بعد از «کوچک‌کردن» هایمان پیش می‌آید این است که آیا می‌توان برای هر فضای برداری پایه‌ای پیدا کرد؟ پُر واضح است که پایه منحصر به فرد نیست(مثلاً، هر دو بردار نا هم‌خط در صفحه، تشکیل پایه‌ای برای صفحه می‌دهند)؛ آیا می‌توانیم مشخصهٔ مشترک خوبی برای پایه‌ها پیدا کنیم؟(مثلاً، هر پایهٔ $\mathbb{R}^2$، مجموعه‌ای دوعضوی‌ست).

یک راه ساده برای پیدا کردن زیرمجموعه‌ای مستقل خطی، این‌است که برداری مثل $\mathbf{a}_1$ از V منهای $\{\mathbf{0}\}$(زیرفضای تولیدشده با تهی) بگیریم، برداری مثل $\mathbf{a}_2$ از $V - \langle \mathbf{a}_1 \rangle$ بگیریم و این کار را ــ یعنی گرفتن برداری بیرون از فضای تولیدشده با قبلی‌ها را ــ آن‌قدر ادامه دهیم که دیگر نتوان برداری پیدا کرد؛ اما آیا با این روال، می‌توان پایه‌ای از فضا پیدا کرد؟ جواب این سؤال، برای فضاهایی که در این

بحث با آنها سر و کار داریم، مثبت است.

پایه‌ها و بُعد

حالا سعی می‌کنیم که وجود و [شکلی از] یکتایی پایه را(برای زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$) ثابت کنیم و برای این کار، به لمی ساده احتیاج داریم.

لم ۲. *(لم تعویض) فرض‌کنید که S زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای V باشد. اگر $\mathbf{a}$ برداری ناصفر در زیرفضای تولیدشده با S باشد، آنگاه $\mathbf{b} \in S$ هست که زیرفضای تولیدشده با $S - \{\mathbf{b}\}$ و $\mathbf{a}$ با زیرفضای تولیدشده با S برابر است. به‌علاوه، اگر S مستقل خطی باشد، $(S - \{\mathbf{b}\}) \cup \{\mathbf{a}\}$ هم مستقل خطی‌ست.*

برهان. چون $\mathbf{a} \in \langle S \rangle$، بردارهایی مثل $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ در S و $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ موجودند که $\mathbf{a} = t_1\mathbf{b}_1 + \cdots + t_m\mathbf{b}_m$ و چون $\mathbf{a}$ ناصفر است، دست‌کم یکی از t ها ــ مثلاً t_i ــ ناصفر است. حالا $\mathbf{b}$ را $\mathbf{b}_i$ بگیرید و برهان را تمام کنید. ■

یکی از نتیجه‌های ساده، اما به‌غایت کارآمد لم تعویض، لم زیر است:

لم ۳. *اگر فضا پایه‌ای n عضوی داشته‌باشد، هر مجموعه با بیش از n عضو وابستهٔ خطی‌ست.*

برهان. با لم تعویض، n عضو از اعضای مجموعه را با اعضای پایه عوض کنید. آن‌چه به‌دست می‌آید، پایه‌ای برای فضاست؛ پس هر عضو دیگر مجموعه، ترکیبی خطی از این بردارهاست. ■

به‌کمک این لم، می‌توانیم «وجود پایه» را هم برای زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ ثابت‌کنیم:

قضیه ۱. *هر زیرفضا[ی ناصفر] مثل V از $\mathbb{R}^n$ پایه دارد.*

برهان. مجموعهٔ S_1 را $V - \{0\}$ بگیرید و $\mathbf{b}_1$ را [در صورت امکان] عضوی از S_1. مجدداً، S_2 را $V - \langle \mathbf{b}_1 \rangle$ می‌گیریم و $\mathbf{b}_2$ را [در صورت امکان] عضوی از S_2؛ و این روال را ــ کم کردن زیرفضای تولیدشده با بردارهای قبلی و انتخاب بردار جدید را ــ تا جایی‌که نتوانیم بردار جدید انتخاب کنیم ادامه می‌دهیم و اگر [احتمالاً] m موجود بود که $S_m = \emptyset$، همهٔ S_i ها را(برای $n \leq i$) تهی می‌گیریم. اگر S_{n+1} ناتهی باشد، $n+1$ بردار $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n+1}$ باید مستقل خطی باشند. از طرفی، $\mathbf{e}_i$ ها(برای $1 \leq i \leq n$) پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهند؛ پس بنا به لم قبل، $\mathbf{b}_i$ ها(برای $1 \leq i \leq n+1$) نمی‌توانند مستقل خطی باشند و این تناقض، نشان می‌دهد که $S_{n+1} = \emptyset$.

حالا m را بزرگترین عدد طبیعی‌ای که $S_m \neq \emptyset$ بگیرید؛ واضح‌است که $m \leq n$. ادعا می‌کنیم که $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند. روشن‌است که این $\mathbf{b}$ ها مستقل خطی هستند(چرا؟). برای اثبات مولد بودنشان، داریم $V - \langle \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m \rangle = S_{m+1} = \emptyset$. ■

با لم تعویض، می‌توانیم حکمی جالب دربارهٔ تعداد اعضای پایه‌های یک زیرفضا ثابت کنیم؛ این که اگر فضایی یک پایهٔ متناهی داشته باشد، هر پایهٔ دیگر فضا هم [متناهی‌ست و] همان قدر عضو دارد.

قضیه ۲. *فرض‌کنید B پایه‌ای n عضوی برای V باشد. اگر B' پایه‌ای برای V باشد، B' هم n عضوی‌ست.*

برهان. واضح‌است که B' کمتر از n عضو ندارد(چرا؟). اگر بیش از n عضو داشته‌باشد، بنا به لم‌های قبلی نمی‌تواند مستقل خطی باشد. ■

این «عدهٔ اعضای پایهٔ V» را «بُعد V» می‌نامیم و با «بُعد(V)» یا «$\dim V$» نشان می‌دهیم. نکتهٔ جالب(که چندان ربطی هم به بحثمان ندارد) این‌است که زیرفضاهای هم‌بعد و مثلاً با بعد m ــ حتی از دو فضای مختلف ــ درست مثل هم کار می‌کنند؛ درواقع، اگر اسم‌های اعضاشان را عوض‌کنیم، یکی هستند: همان فضای آشنای $\mathbb{R}^m$!

از این به‌بعد، فقط با زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ ها کار می‌کنیم. یکی از کارآمدترین حکم‌ها، لم سادهٔ زیر است:

لم ۴. *فرض‌کنید S زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از زیرفضای V باشد. V پایه‌ای مثل B دارد که $S \subseteq B$.*

برهان. فرض‌کنید که $\mathcal{B}$. پایهٔ دلخواهی برای V باشد و اعضای S را با را با اعضای $\mathcal{B}$. عوض‌کنید و مجموعهٔ حاصل را ــ که پایه است ــ $\mathcal{B}$ بنامید. ■

دیگر به هدفمان رسیده‌ایم و می‌توانیم همهٔ مفهوم‌های معمول را با این شکل تعریف‌کنیم و حکم‌های معمول را به‌راحتی ثابت کنیم؛ مثلاً، به‌عنوان تمرین، می‌توانید «اشتراک» دو زیرفضای V و W را تعریف کنید و ــ با همان تعریف عادی $V+W$ ــ ثابت کنید که

$$\dim V + W = \dim V + \dim W - \dim V \cap W.$$

(یک راه ساده، این است که پایه‌ای برای $V \cap W$ بگیرید و یک‌بار به پایه‌ای برای V تبدیلش کنید و یک‌بار به پایه‌ای برای W، و سرآخر ببینید که آیا می‌توان از این پایه[ها] پایه‌ای برای $V+W$ ساخت یا نه.)

تابع‌های خطی

در این بخش، می‌خواهیم ردهٔ تابع‌هایی که مناسب کار با فضاهای خطی هستند را مشخص کنیم. احتمالاً، «طبیعی‌ترین» تابع‌ها، تابع‌هایی هستند که خط را به خط[1] می‌برند. به‌عبارت بهتر، می‌خواهیم که «خط گذرا از $\mathbf{a}$ و موازی $\mathbf{b}$ » تحت اثر تابع T به «خط گذرا از $T(\mathbf{a})$ و موازی $T(\mathbf{b})$» برود؛ یا، با نمادهامان، $T(\mathcal{L}(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \mathcal{L}(T(\mathbf{a}),T(\mathbf{b}))$. با این حساب، باید برای هر $t \in \mathbb{R}$ دست کم یک $s \in \mathbb{R}$ باشد که $T(\mathbf{a}+t\mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + sT(\mathbf{b})$. به دلایلی، می‌خواهیم که این s «فقط تابع t» باشد؛ پس بالاخره تعریفمان این‌است که «تابع T از زیرفضای V به زیرفضای W را خطی می‌گوییم اگر برای هر $t \in \mathbb{R}$، $s \in \mathbb{R}$ باشد که برای هر $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V$، $T(\mathbf{a}+t\mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + sT(\mathbf{b})$». دوباره، مثل بخش قبل، هدفمان این‌است که معادل بودن این تعریف را با تعریف معمول تابع خطی ثابت کنیم. ایدهٔ کار ساده است: اگر T تابع ثابت صفر باشد که مشکلی نیست؛ اگر نه، به‌راحتی می‌توان نشان داد که برای هر t، فقط یک s وجود دارد: اگر s_1 و s_2 هردو برای یک t به‌دست آمده‌باشند، برای هر $\mathbf{b} \in V$ باید $s_1T(\mathbf{b}) = s_2T(\mathbf{b})$(چرا؟)؛ پس اگر T همیشه صفر نباشد، باید $s_2 = s_1$. پس با خیال راحت می‌توانیم فرض کنیم که تابع f از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ هست که $s = f(t)$. کار تمام است، اگر و فقط اگر بتوانیم این قضیه را ثابت کنیم:

قضیه ۳. *برای هر* $t \in \mathbb{R}$، $f(t) = t$.

برهان این قضیه را در تمرین‌ها خواسته‌ایم.

با استفاده از این قضیه(و کمی استقرا)، مثلاً می‌توانیم نشان دهیم که برای هر $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$ و هر $t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}$، $T(t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n) = t_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + t_nT(\mathbf{v}_n)$. نتیجه این که «تصویر هر زیرفضا از V تحت T، زیرفضایی از W است». به‌راحتی می‌توانید ثابت کنید که $\dim T(V) \le \dim V$.

یکی از زیرمجموعه‌های جالب توجه دامنهٔ تابع خطی، مجموعهٔ نقش معکوس صفر است که به «هستهٔ T» معروف است و با $\ker T$ نشانش می‌دهند؛ پس $\ker T$، مجموعهٔ همهٔ $\mathbf{x} \in V$ هایی‌ست که $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. همان‌طور که دیده‌اید، نقش معکوس هر عضو از برد، مجموعه‌ای‌ست که از انتقال $\ker T$ به‌دست آمده. از این خاصیت، دیرتر و در بررسی دستگاه‌های خطی استفاده می‌کنیم. به بعد $\ker T$ هم پوچی T می‌گوییم و با $\operatorname{nullity} T$ نشانش می‌دهیم.

گفتیم که $\dim T(V) \le \dim V$. مقدار $\dim T(V)$(که «رتبهٔ T» می‌نامندش و با $\operatorname{rank} T$ نشانش می‌دهند) چقدر است؟ روشن است که اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای دلخواه برای V باشد، $\{T(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathcal{B}\}$ «مولد» $T(V)$ هست (همین دلیل نابیشتر بودن بعد $T(V)$ از بعد V است)؛ هرچند که ممکن است پایه نباشد.

چون انتخاب پایهٔ V کاملاً آزاد است و بُعد $T(V)$ هم مستقل از انتخاب پایه، «عاقلانه» است که پایهٔ خاصی برای V بگیریم که «رفتار» T روی [دست کم بعضی از] اعضای آن مشخص است و ساده‌ترین کار، گرفتن پایه‌ای‌ست که از بزرگ کردن پایهٔ $\ker T$ به‌دست

۱) البته با کمی بی‌دقتی: شاید بهتر باشد که جای لفظ «خط»، از چیزی مثل «فرم خط» ــ به معنی $\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ ها، حتی وقتی که $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ــ استفاده کنیم که شامل مجموعه‌های تک نقطه‌ای هم هست.

توابع حسابی

محمدرضا پورنکی

چکیده

در این مقاله توابع حسابی را بررسی می‌کنیم و بعضی از خواص این تابع‌ها را ثابت خواهیم کرد. در پایان نیز دو تابع حسابی مهم را معرفی می‌کنیم و ضابطهٔ صریحی برای محاسبهٔ مقدار آنها پیدا خواهیم کرد.

مقدمه

در مقالهٔ تابع حسابی اویلر که در شمارهٔ قبل به چاپ رسیده است، تابع حسابی اویلر (تابع فی اویلر) را معرفی کردیم. یادآوری می‌کنیم که $\phi(n)$ برابر است با تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از یا مساوی با n که نسبت به n اول هستند و این ضابطه، تابعی روی اعداد طبیعی تعریف می‌کند که آن را تابع حسابی اویلر می‌نامند. همچنین، دیدیم که این تابع ارتباطی نزدیک با دستگاه مخفف مانده‌ها دارد و از آنجا توانستیم خاصیتی که به خاصیت ضربی تابع ϕ معروف است و حکم می‌کند که «برای هر دو عدد طبیعی m و n که $(m,n) = ۱$، $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$» را ثابت کنیم. اکنون می‌خواهیم مفهوم تابع حسابی را تعریف کنیم(تابع حسابی اویلر حالت خاصی از ردهٔ این توابع خواهد بود)، همچنین خاصیت ضربی را برای یک تابع حسابی تعریف خواهیم کرد و با معرفی دو تابع حسابی مهم، ضابطه‌ای برای محاسبهٔ مقدار این توابع خواهیم یافت.

توابع حسابی

تعریف ۱. *هر تابعی که دامنهٔ تعریف آن مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد را تابع حسابی می‌نامند.*

مثال ۱. *تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$ یک تابع حسابی است.*

مثال ۲. *تابع $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ که برای هر n طبیعی برابر تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از یا مساوی با n که نسبت به n اولند($\phi(n) =$) تعریف می‌شود، یک تابع حسابی است. توجه می‌کنیم که ϕ همان تابع حسابی اویلر است.*

مثال ۳. *تابع $d : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ*

$$d(n) = n \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت}$$

یک تابع حسابی است.

مثال ۴. *تابع $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ*

$$\sigma(n) = n \text{ مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت}$$

یک تابع حسابی است.

ریاضیات شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص ۲۰ـ۱۶

اکنون خاصیتی را معرفی می‌کنیم که به خاصیت ضربی تابع حسابی معروف است.

تعریف ۲. *فرض کنیم $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ یک تابع حسابی باشد. f را ضربی می‌نامیم هرگاه برای هر دو عدد طبیعی m و n که $(m,n) = ۱$، $f(mn) = f(m)f(n)$.*

مثال ۵. *قبلاً ثابت کردیم که برای هر دو عدد طبیعی m و n که $(m,n) = ۱$، $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ و لذا ϕ تابعی ضربی است. توجه می‌کنیم که در اینجا لازم است که $(m,n) = ۱$؛ زیرا مثلاً $\phi(۲ \times ۴) \neq \phi(۲)\phi(۴)$.*

مثال ۶. *فرض کنیم $J : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با $J(n) = ۱$ برای هر n تعریف شود؛ در این صورت برای هر دو عدد طبیعی m و n که $(m,n) = ۱$، $J(mn) = J(m)J(n)$ و لذا J تابعی ضربی است. توجه می‌کنیم که در اینجا $(m,n) = ۱$ لزومی ندارد و در واقع برای هر دو عدد طبیعی m و n، $J(mn) = J(m)J(n)$. این توابع را قویاً ضربی می‌نامند.*

مثال ۷. *فرض کنیم $I : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ به صورت $I(n) = n$ تعریف شود؛ در این صورت برای هر دو عدد طبیعی m و n که $(m,n) = ۱$، $I(mn) = I(m)I(n)$ و لذا I تابعی ضربی است. توجه می‌کنیم که در واقع I قویاً ضربی است.*

اکنون به کمک تعریف ۲ و به استقرا، می‌توانیم قضیهٔ زیر را نتیجه بگیریم:

قضیه ۱. *فرض کنیم $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ یک تابع حسابی ضربی باشد؛ داریم*

$$f(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_k^{\alpha_k})$$

که در آن $p_1, \dots, p_k$ اعداد اول متمایزند و $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ اعداد طبیعی.

در واقع، این قضیه حاکی از آن است که برای به دست آوردن ضابطه‌ای صریح برای محاسبهٔ مقدار تابع حسابی، کافی‌ست مقدار آن را در توان‌های اعداد اول بدانیم.

اکنون قضیه‌ای را مطرح می‌کنیم که در محاسبهٔ ضابطهٔ صریح توابع حسابی کارساز است.

قضیه ۲. *اگر $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ یک تابع حسابی ضربی باشد، تابع $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ یک تابع حسابی ضربی است (منظور از $\sum_{d|n}$ مجموع روی مقسوم علیه‌های مثبت n است).*

برهان. این که g تابعی حسابی است واضح است. فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند که $(m,n) = ۱$؛ در این صورت

$$g(m)g(n) = \left(\sum_{d|m} f(d)\right)\left(\sum_{d'|n} f(d')\right) = \sum_{d|m}\sum_{d'|n} f(d)f(d').$$

اکنون توجه می‌کنیم که $d \mid m$ و $d' \mid n$ و $(m,n) = ۱$ نتیجه می‌دهد که $(d,d') = ۱$ و لذا ضربی بودن f ایجاب می‌کند که $f(dd') = f(d)f(d')$؛ پس می‌توانیم بنویسیم

$$g(m)g(n) = \sum_{d|m}\sum_{d'|n} f(dd').$$

به‌راحتی دیده می‌شود که

$$\{dd' :\ d \mid m, d' \mid n\} = \{s :\ s \mid mn\}$$

و در نتیجه

$$g(m)g(n) = \sum_{s|mn} f(s) = g(mn)$$

و این نشان می‌دهد که g تابع ضربی است. ■

تابع حسابی d

فرض کنیم $d(n)$ برابر تعداد مقسوم علیه‌های مثبت n باشد. این ضابطه، تابع $d:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ را به‌دست می‌دهد که در مثال ۳ نیز آن را معرفی کردیم. اکنون، به کمک قضیهٔ ۲، ثابت می‌کنیم که d تابعی ضربی است.

لم ۱. *تابع $d:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ضربی است.*

برهان. تابع $J:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $J(n)=۱$ را که در مثال ۶ معرفی شد، در نظر می‌گیریم؛ این تابع به‌وضوح ضربی است. حال توجه می‌کنیم که

$$d(n)=n \text{ تعداد مقسوم علیه‌های مثبت } = \underbrace{۱+\cdots+۱}_{\text{به تعداد مقسوم علیه‌های مثبت } n} = \sum_{d|n} J(d);$$

اکنون قضیهٔ ۲ نتیجه می‌دهد که d ضربی است. ■

لم ۲. *برای هر عدد طبیعی α و هر عدد اول p، $d(p^\alpha)=\alpha+۱$.*

برهان. واضح است که تنها مقسوم علیه‌های مثبت p^α عبارتند از $۱, p, \ldots, p^\alpha$ که تعدادشان برابر $\alpha+۱$ است؛ پس $d(p^\alpha)=\alpha+۱$. ■

قضیه ۳. *داریم*

$$d(n)=\begin{cases} ۱ & : n=۱ \text{ اگر } \\ \\ (\alpha_۱+۱)\cdots(\alpha_k+۱) & : n=p_۱^{\alpha_۱}\cdots p_k^{\alpha_k} \text{ اگر } \end{cases}$$

که در آن p_i ها اعداد اول متمایزند و α_i ها طبیعی.

برهان. واضح است که برای $n=۱$، $d(n)=۱$. اکنون گیریم $n>۱$. اگر $n=p_۱^{\alpha_۱}\ldots p_k^{\alpha_k}$ تجزیهٔ استاندارد n به عوامل اول باشد، بنا بر قضیهٔ ۱ و لم ۱ و ۲ داریم

$$\begin{aligned} d(n) &= d(p_۱^{\alpha_۱}\cdots p_k^{\alpha_k}) \\ &= d(p_۱^{\alpha_۱})\cdots d(p_k^{\alpha_k}) \\ &= (\alpha_۱+۱)\cdots(\alpha_k+۱). \end{aligned}$$

■

مثال ۸. *تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $n=۳۶۰$ برابر است با ۲۴؛ زیرا*

$$d(۳۶۰)=d(۲^۳\times۳^۲\times۵^۱)=(۳+۱)(۲+۱)(۱+۱)=۴\times۳\times۲=۲۴.$$

تابع حسابی σ

فرض کنیم $\sigma(n)$ برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت n باشد. این ضابطه، تابع $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ را به‌دست می‌دهد که در مثال ۴ نیز آن را معرفی کردیم. اکنون، به‌کمک قضیهٔ ۲، ثابت می‌کنیم که σ ضربی است.

لم ۳. *تابع $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ضربی است.*

برهان. تابع $I:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $I(n)=n$ را که در مثال ۷ معرفی شد، در نظر می‌گیریم؛ این تابع به‌وضوح ضربی است. حال توجه می‌کنیم که

$$\sigma(n)=\text{مجموع مقسوم علیه‌های مثبت } n=\sum_{d|n}d=\sum_{d|n}I(d);$$

اکنون قضیهٔ ۲ نتیجه می‌دهد که σ ضربی است. ■

لم ۴. *برای هر عدد طبیعی α و هر عدد اول p،* $\sigma(p^\alpha)=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$.

برهان. واضح است که تنها مقسوم علیه‌های مثبت p^α عبارتند از $1, p, \ldots, p^\alpha$؛ پس

$$\sigma(p^\alpha)=1+p+\cdots+p^\alpha=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$$

■

قضیه ۴. *داریم*

$$\sigma(n)=\begin{cases}1 & \text{اگر } n=1:\\ \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} & \text{اگر } n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}:\end{cases}$$

که در آن p_i ها اعداد اول متمایزند و α_i ها طبیعی.

برهان. واضح است که برای $n=1$، $\sigma(n)=1$. اکنون گیریم $n>1$. اگر $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ تجزیهٔ استاندارد n به عوامل اول باشد آنگاه بنابر قضیهٔ ۱ و لم ۳ و ۴ داریم

$$\begin{aligned}\sigma(n)&=\sigma(p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k})\\&=\sigma(p_1^{\alpha_1})\cdots\sigma(p_k^{\alpha_k})\\&=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.\end{aligned}$$

■

مثال ۹. *مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت $n=360$ برابر است با 1170؛ زیرا*

$$\sigma(360)=\sigma(2^3\times3^2\times5^1)=\frac{2^4-1}{2-1}\times\frac{3^3-1}{3-1}\times\frac{5^2-1}{5-1}=15\times13\times6=1170.$$

اکنون چند مسأله در ارتباط با مفاهیم بالا مطرح می‌کنیم.

تمرین.

۱) در قضیهٔ ۳ مقالهٔ تابع حسابی اویلر ثابت کردیم که $\sum_{d|n}\phi(d)=n$. این حکم را به کمک قضیهٔ ۱ و ۲ از این مقاله ثابت کنید.

۲) $\sum_{s|n}d(s)$ و $\sum_{s|n}\sigma(s)$ را محاسبه کنید.

۳) نشان دهید که $d(n) = ۲$ اگر و فقط اگر n اول باشد.

۴) نشان دهید که $d(n)$ فرد است اگر و فقط اگر n مربع کامل باشد.

۵) نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح $m \geq ۲$، نامتناهی عدد صحیح مانند n موجود است که $d(n) = m$. کوچک‌ترین عدد صحیح n که دارای این خاصیت باشد کدام است؟

۶) نشان دهید $\prod_{d|n} d = n^{\frac{d(n)}{۲}}$ ($\prod_{d|n}$ یعنی حاصل‌ضرب روی کلیهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت n).

۷) ثابت کنید که $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{۱}{d}$.

۸) نشان دهید $d(n) \leq ۲\sqrt{n}$.

۹) نشان دهید که برای هر n، $n \leq \sigma(n) \leq n^۲$.

۱۰) عدد تام، عددی طبیعی مانند n است که با مجموع مقسوم‌علیه‌های سرهٔ خود (یعنی مقسوم‌علیه‌های مثبت n غیر از خود n) برابر باشد. ثابت کنید اگر $۲^a - ۱$ عددی اول باشد آنگاه $۲^{a-۱}(۲^a - ۱)$ عددی تام است.

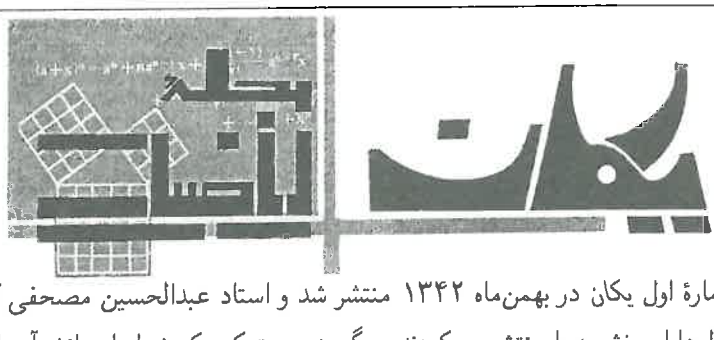
۱۱) فرض کنید n عددی زوج و تام باشد. ثابت کنید n به صورت $۲^{a-۱}(۲^a - ۱)$ است که در آن $۲^a - ۱$ عددی اول است.

۱۲) ثابت کنید اگر n عددی تام باشد آنگاه $\sum_{d|n} \frac{۱}{d} = ۲$.

مراجع

[۱] ویلیام و. آدامز و لری جوئل گولدشتین، آشنایی با نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ آدینه محمد نارنجانی. مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ اول ۱۳۶۲.

[۲] نیل. اچ. مک‌کوی، نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ غلامحسین بهفروز و میرکمال میرنیا. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۳.



شمارهٔ اول یکان در بهمن‌ماه ۱۳۴۲ منتشر شد و استاد عبدالحسین مصحفی که سال‌ها این نشریه را منتشر می‌کردند، بر گردن دست کم یک نسل از دانش‌آموزان ایرانی حق بزرگی دارند. خیلی‌ها، روز اول هر ماه یکان را می‌خریدند و به مدرسه می‌رفتند و مقالات و مسأله‌های آن زبان‌زد بچه مدرسه‌ای‌ها بود. آقای مصحفی لطف خود را به ماهنامهٔ ریاضیات هم نشان داده‌اند و ان شاء ا... از ایشان مطالبی خواهیم داشت و گه‌گاه هم از دورهٔ یکان مطالبی را نقل خواهیم کرد.

راهکارهای حل مسأله

سهیلا غلام‌آزاد

یکی از اهداف آموزش ریاضی، پرورش انسان‌های فهیم، نقاد و تصمیم‌گیرنده است؛ انسان‌هایی که در برخورد با موقعیت‌های جدید، بتوانند شرایط را به‌طور صحیحی تحلیل کنند و بهترین عکس‌العمل را از خود بروز دهند. لازمهٔ بروز رفتاری صحیح، داشتن ذهنی منظم و آشنایی با مهارت‌های تفکر است و یکی از عمده‌ترین مهارت‌های تفکر، مهارت و یا به عبارتی هنر حل مسأله است. با توجه به اهمیت این موضوع، هیأت تحریریهٔ مجله تصمیم گرفت تا قبل از فراگیر شدن این برنامه در آموزش رسمی، باب آن را در مجله بگشاید و از پایه‌ای‌ترین مراحل، آموزش استراتژی‌های حل مسأله را پی بگیرد.

تنظیم جدول نظام‌دار

مدتی‌ست که لیلا تصمیم گرفته سکه‌های ۱ تومانی، ۵ تومانی و ۱۰ تومانی‌ای که به دستش می‌رسد را در قلکش پس‌انداز کند. در حال حاضر، او می‌داند که ۲۵ تومان در قلک دارد؛ ولی نمی‌داند از هریک از این سکه‌ها چه تعداد دارد. آیا می‌توانید همهٔ ترکیب‌های ممکن سکه‌ها را که مجموع آنها ۲۵ تومان می‌شود بیابید؟

♦ قبل از ادامهٔ مطالعه، سعی کنید مسأله را حل کنید.

شاید بگویید «می‌توانیم پنج سکهٔ ۵ تومانی داشته باشیم، یا دو سکهٔ ۱۰ تومانی و یک پنج تومانی داشته باشیم. ممکن‌است بیست و پنج سکهٔ ۱ تومانی داشته باشیم، یا ده سکهٔ ۱ تومانی و یک سکهٔ ۱۰ تومانی و یک سکهٔ ۵ تومانی. یا ...»

ولی این راه فایده‌ای برای حل مسأله ندارد؛ زیرا ممکن است مدت‌ها طول بکشد و احتمالاً بالاخره هم نتوانید مطمئن باشید که همهٔ راه‌ها را در نظر گرفته‌اید. راه بهتر برای حل این مسأله، تنظیم یک جدول نظام‌دار است. جدول نظام‌دار دقیقاً همان چیزی‌ست که در نام آن آمده: جدولی که بر اساس نوعی نظم تولید شده است. ممکن است این نظم آن‌قدر واضح باشد که سازندهٔ آن بتواند سریعاً دقت آن را ثابت کند؛ هم‌چنین برای فرد دیگری که جدول را می‌بیند درک نظم و تأیید آن زحمت زیادی نداشته باشد.

اغلب جدول‌های نظام‌دار سطری(یا ستونی) دارند که در آن اطلاعات مسأله ثبت می‌شود. در این مسأله، سطرها را با ۱۰ تومانی، ۵ تومانی و ۱ تومانی نام‌گذاری می‌کنیم و بعد، با ترکیب‌های مختلف این سکه‌ها که مجموعشان ۲۵ تومان می‌شود پرشان می‌کنیم.

۱۰ تومانی	۲	۲	۱	۱	
۵ تومانی	۱	۰	۳	۲	و ...
۱ تومانی	۰	۵	۰	۵	

بیشترین تعداد ۱۰ تومانی‌ها در قلک، دو تا می‌تواند باشد. از همین نقطه شروع می‌کنیم. مرحلهٔ بعد تعیین بیشترین تعداد ۵ تومانی‌هاست. در سطر اول، دو تا ۱۰ تومانی و یک ۵ تومانی و صفر تا ۱ تومانی داریم. حالت بعدی، دو تا ۱۰ تومانی و صفر تا ۵ تومانی و پنج تا ۱ تومانی است. ترکیب دیگری که در آن دو تا ۱۰ تومانی باشد وجود ندارد؛ بنابراین، ترکیب‌هایی را که یک ۱۰ تومانی دارند، پیدا می‌کنیم. وقتی یک ۱۰ تومانی داریم، بیشترین تعداد ۵ تومانی‌ها سه‌تا می‌شود و ۱ تومانی نداریم. ترکیب دیگر در این حالت، یک ۱۰ تومانی، دو تا ۵ تومانی و پنج تا ۱ تومانی خواهدبود و به‌همین ترتیب می‌توان با نظم پیش رفت. پس از تکمیل جدول، مشاهده می‌شود که ۱۲

شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص ۲۱ـ۲۴

حالت برای این مسأله وجود دارد.

۱۰ تومانی	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۵ تومانی	۱	۰	۳	۲	۱	۰	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۱ تومانی	۰	۵	۰	۵	۱۰	۱۵	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵

توجه کنید که برای تنظیم جدول می‌توانستیم با بیشترین تعداد ۱ تومانی شروع و همهٔ ترکیب‌های ممکن را تعیین کنیم.

سکه‌های پدرام

پدرام ۲۵ سکهٔ ۱۰ تومانی دارد. او می‌خواهد سکه‌های خود را در سه ستون طوری قرار دهد که در هر ستون تعداد سکه‌ها عددی فرد باشد. تعیین کنید او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

این مسأله را با تنظیم یک جدول نظام‌دار به‌سادگی می‌توان حل کرد. با توجه به صورت مسأله، سه سطر برای جدول در نظرگرفته و آنها را با عنوان ستون ۱، ستون ۲ و ستون ۳ نام‌گذاری می‌کنیم. می‌توان با کوچک‌ترین عدد فرد ــ یعنی ۱ ــ شروع کرد. با قرار دادن یک سکه در ستون‌های اول و دوم، ستون سوم ۲۳ سکه خواهد داشت. بعد، با درنظرگرفتن همان یک سکه در ستون اول، به ستون دوم ۲ تا سکه اضافه و نتیجتاً ۲ سکه از ستون سوم کم می‌کنیم و به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم. بعد از هفت مرحله به حالت ۱۳ و ۱۱ و ۱ می‌رسیم که تکرار حالت قبل از آن است؛ یعنی ۱۳ و ۱۱ و ۱. در اینجا این سؤال پیش می‌آید که این دو حالت متمایزند یا نه.

ستون ۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
ستون ۲	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳
ستون ۳	۲۳	۲۱	۱۹	۱۷	۱۵	۱۳	۱۱

واقعیت این است که هر دوی این موارد یک حالت را نشان می‌دهند و می‌توان با حذف این حالت‌های تکراری جدول را خیلی کوتاه‌تر کرد. حالت بعدی هم ۹ و ۱۵ و ۱ است که تکرار ۱۵ و ۹ و ۱ است؛ پس می‌توان نتیجه گرفت که تمام حالت‌هایی که در ستون ۱، یک سکه باشد در نظرگرفته شده‌اند و حالت ۱۱ و ۱۳ و ۱ را می‌توان خط زد. حالت بعدی را اگر ۲۱ و ۱ و ۳ بگیریم، مجدداً می‌بینیم که این حالت هم تکراری است؛ لذا حذف می‌شود.

ستون ۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۳	۳
ستون ۲	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱	۳
ستون ۳	۲۳	۲۱	۱۹	۱۷	۱۵	۱۳	۱۱	۲۱	۱۹

پس، این بار در ستون‌های ۱ و ۲، هریک سه سکه و در ستون ۳، نوزده سکه قرار می‌دهیم و باز فرایند افزودن ۲ سکه به ستون دوم و کم کردن ۲ سکه از ستون سوم را ادامه می‌دهیم. با حذف حالت‌های تکراری می‌توان جدول را به‌صورت زیر تکمیل کرد که در آن ۱۶ حالت ظاهر می‌شود.

ستون ۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۳	۳	۳	۳	۳	۵	۵	۵	۷	۷
ستون ۲	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۵	۷	۹	۷	۹
ستون ۳	۲۳	۲۱	۱۹	۱۷	۱۵	۱۳	۱۹	۱۷	۱۵	۱۳	۱۱	۱۵	۱۳	۱۱	۱۱	۹

شما می‌توانید مسأله را با در نظرگرفتن نظام دیگری حل کنید؛ مثلاً در ستون اول ۲۳ سکهٔ یک تومانی قرار دهید یا می‌توانید بین ستون‌ها تمایز قائل شوید و جدول طویل‌تری داشته باشید. توجه کنید که در حالت اخیر، ۷۸ حالت ممکن خواهید داشت.

مساحت و محیط

مساحت مستطیلی ۱۲۰ سانتی‌متر مربع است. طول و عرض این مستطیل اعداد طبیعی هستند. چند مستطیل با این ویژگی وجود دارد؟ کدام‌یک از این مستطیل‌ها کمترین محیط را دارد؟

♦ قبل از ادامهٔ مطالعه روی مسأله کار کنید.

شاید اولین چیزی که برای حل این مسأله به ذهن می‌رسد، رسم یک مستطیل باشد؛ ولی نمی‌توان تصمیم گرفت که این مستطیل باید لاغر و دراز باشد، یا بیشتر شبیه به یک مربع.

با توجه به‌این که مساحت مستطیل ۱۲۰ سانتی‌متر مربع است، می‌توانیم با تنظیم جدولی، همهٔ حالت‌هایی که حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی، ۱۲۰ می‌شود را در نظر بگیریم.

عرض	۱cm	۲cm	۳cm	۴cm	۵cm	۶cm	۸cm	۱۰cm
طول	۱۲۰cm	۶۰cm	۴۰cm	۳۰cm	۲۴cm	۲۰cm	۱۵cm	۱۲cm
مساحت	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2

اگر بخواهیم با همین نظم جدول را ادامه دهیم، حالت بعدی ۱۲۰ و ۱۰ و ۱۲ خواهد بود که تکرار حالت قبل از آن است. پس می‌توان جدول را در همین‌جا متوقف کرد و نتیجه گرفت که هشت مستطیل بااین ویژگی وجود دارند.

برای پاسخ‌گویی به قسمت دوم مسأله، کافی‌ست جدول را گسترش دهیم و در هریک از حالت‌ها محیط مستطیل را نیز محاسبه کنیم.

عرض	۱cm	۲cm	۳cm	۴cm	۵cm	۶cm	۸cm	۱۰cm
طول	۱۲۰cm	۶۰cm	۴۰cm	۳۰cm	۲۴cm	۲۰cm	۱۵cm	۱۲cm
مساحت	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2	۱۲۰cm^2
محیط	۲۴۲cm	۱۲۴cm	۸۶cm	۶۸cm	۵۸cm	۵۲cm	۴۶cm	۴۴cm

با توجه به جدول می‌توان دید که مستطیل با طول ۱۲ و عرض ۱۰ سانتی‌متر بین مستطیل‌هایی که دارای مساحت ۱۲۰ سانتی‌متر مربع هستند، دارای کمترین محیط، یعنی ۴۴ سانتی‌متر، است.

انتخاب کتاب

در یک کلاس ادبیات فارسی، معلم پیشنهاد کرد از پنج اثر جلال آل احمد به نام‌های مدیر مدرسه، نون والقلم، سرگذشت کندوها، سه‌تار و اورازان، دانش‌آموزان سه کتاب را انتخاب کرده و مورد نقد و بررسی قرار دهند. تعیین کنید این دانش‌آموزان به چند طریق مختلف می‌توانند یک مجموعهٔ سه‌تایی از این آثار انتخاب کنند.

♦ قبل از ادامهٔ مطالعه روی مسأله کار کنید.

با انتخاب اسامی مخفف مم، نق، سک، ست و اور به‌ترتیب برای کتاب‌های مدیر مدرسه، نون والقلم، سرگذشت کندوها، سه‌تار و اورازان و تنظیم یک جدول نظام‌دار مسأله را حل می‌کنیم.

مم	مم	مم	مم	مم	مم	مم	مم	مم	مم
نق	نق	نق	سک	سک	ست	سک	سک	ست	ست
سک	ست	اور	ست	اور	اور	ست	اور	اور	اور

اگر کتاب مم را به‌عنوان انتخاب اول در نظر بگیریم، دو انتخاب دیگرمان از ۴ کتاب باقی‌مانده انجام می‌شود. سپس کتاب نق را در محل اولین انتخاب قرار می‌دهیم و از سه کتاب باقی‌مانده دو انتخاب بعدی را انجام می‌دهیم. بعد کتاب سک را در محل اولین انتخاب قرار می‌دهیم که برای دو انتخاب بعدی فقط یک حالت وجود خواهد داشت.

با توجه به جدول، ملاحظه می‌شود که جمعاً ۱۰ حالت برای انتخاب سه کتاب از مجموعهٔ پنج‌تایی داده شده وجود خواهد داشت.

این مسأله را با تنظیم جدولی مانند جدول زیر نیز می‌توانستیم حل کنیم:

مم	×	×	×	×	×	×				
نق	×	×	×				×	×	×	
سک	×			×	×		×	×		×
ست		×		×		×	×		×	×
اور			×		×	×		×	×	×

تمرین.

۱) پری قصد دارد با ۶۰۰ تومان پول توجیبی هفتگی‌اش تعدادی مجلهٔ طنز و جدول بخرد. قیمت هر مجلهٔ طنز ۶۰۰ تومان و قیمت هر مجلهٔ جدول ۱۲۰ تومان است. او به چند طریق می‌تواند با همهٔ پولش، مجله‌های طنز و جدول خریداری کند؟ همهٔ حالت‌های ممکن را در یک جدول تنظیم کنید.

۲) آمنه، بهاره، شبنم و نیلوفر، برای پاسخ دادن به یک مسابقهٔ رادیویی، با مرکز پخش رادیو تماس تلفنی گرفتند. همهٔ حالت‌های ممکن را برای ترتیب تماس گرفتن این چهار نفر بنویسید.

۳) مدیر یک شرکت برای اجارهٔ سالانهٔ چند آپارتمان، دو نوع قرارداد تنظیم کرد. در یکی از این قراردادها اجارهٔ ماه اول کم است و در دیگری، افزایش اجاره‌بها تدریجی است. در کدام‌یک از قراردادها، اجارهٔ آپارتمان در ۹ ماه اول گران‌تر تمام می‌شود؟ کدام‌یک از قراردادها برای همهٔ ۱۲ ماه گران‌تر است؟

قرارداد الف برای ۱۲ ماه اجارهٔ آپارتمان	قرارداد ب برای ۱۲ ماه اجارهٔ آپارتمان
• ۴۰۰۰۰ تومان اجارهٔ ماه اول • اجارهٔ هر ماه ۳۰۰۰ تومان زیاد می‌شود	• ۵۰۰۰۰ تومان اجارهٔ ماه اول • اجارهٔ هر ماه ۱۵۰۰ تومان زیاد می‌شود

۴) خانم رمضانی به چند طریق می‌تواند یک اسکناس ۵۰ تومانی را به سکه‌های ۵ تومانی، ۱۰ تومانی و ۲۵ تومانی خرد کند؟

۵) حاصل ضرب دو عدد حسابی ۳۶۰ و مجموع آنها کمتر از ۱۰۰ است. همهٔ حالت‌های ممکن برای این دو عدد را بنویسید.

۶) تعاونی مدرسه چندین بسته آب‌نبات را به قیمت بسته‌ای ۵، ۱۰ و ۱۵ تومان حراج کرده است. کمال ۴۰ تومان پول دارد. همهٔ راه‌هایی را که او می‌تواند همه یا قسمتی از پولش را برای خرید آب‌نبات خرج کند بنویسید.

مراجع

[1] T. Herr, K. Johnson, *Problem Solving Strategies.* Key curriculum press, 1994.

[۲] یحیی تابش، جواد حاج‌بابایی، آرش رستگار، آموزش هنر حل مسأله، ۱. سال اول متوسطه.

نامساوی‌ها (قسمت دوم)

کورش توکلی

در این قسمت به طرح چند نامساوی دیگر می‌پردازیم. در نخستین نامساوی که مطرح می‌شود، نامساوی کوشی ـ شوارتز تعمیم داده می‌شود.

نامساوی هُلدر. اگر $a_1,\ldots,a_n$ و $b_1,\ldots,b_n$ اعدادی مثبت باشند و p و q دو عدد بزرگ‌تر از ۱ که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ آنگاه

$$(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}\geq a_1b_1+\cdots+a_nb_n.$$

توجه کنید که در حالت $p=q=2$، نامساوی هلدر همان نامساوی کوشی ـ شوارتز است.

برای اثبات نامساوی هلدر، ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر p و q همان شرایط گفته‌شده در بالا را داشته باشند و a و b دو عدد مثبت باشند، داریم

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geq ab \qquad (1)$$

برهان.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Rightarrow\frac{p+q}{pq}=1\Rightarrow p+q=pq$$

$$\begin{aligned}\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}&=\frac{qa^p+pb^q}{pq}=\frac{qa^p+pb^q}{p+q}=\frac{\overbrace{a^p+\cdots+a^p}^{q\text{تا}}+\overbrace{b^q+\cdots+b^q}^{p\text{تا}}}{p+q}\\&\leq\sqrt[p+q]{\underbrace{a^p\cdots a^p}_{q\text{تا}}\underbrace{b^q\cdots b^q}_{p\text{تا}}}=\sqrt[pq]{a^{pq}b^{pq}}=ab\end{aligned}$$

نامساوی استفاده شده در متن برهان، نامساوی کوشی ـ شوارتز است. ■

اثبات نامساوی هلدر:

اگر در نامساوی (۱) در بالا قرار دهیم

$$a=\frac{a_1}{(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}},\ b=\frac{b_1}{(b_1^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}},$$

داریم

$$\frac{1}{p}\left(\frac{a_1^p}{a_1^p+\cdots+a_n^p}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{b_1^q}{b_1^q+\cdots+b_n^q}\right)\geq\frac{a_1b_1}{(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}}.$$

همین کار را با قرار دادن

$$a=\frac{a_2}{(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}},\ b=\frac{b_2}{(b_1^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}}$$

ریاضیات شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص ۲۷ـ۲۵

انجام می‌دهیم و نامساوی مربوط را می‌نویسیم؛ پس داریم

$$\frac{1}{p}\left(\frac{a_2^p}{a_1^p+\cdots+a_n^p}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{b_2^q}{b_1^q+\cdots+b_n^q}\right)\ \geq \frac{a_2b_2}{(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}}.$$

این کار را تا آخر انجام می‌دهیم و نامساوی‌هایی مشابه دو نامساوی بالا به دست می‌آوریم.

اگر طرف‌های چپ را با هم و طرف‌های راست را با هم جمع کنیم، به

$$\frac{1}{p}\left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{a_1^p+\cdots+a_n^p}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{b_1^q+\cdots+b_n^q}{b_1^q+\cdots+b_n^q}\right)\ \geq \frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}}$$

می‌رسیم و از آنجا که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$، داریم

$$\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}}\leq 1;$$

بنابراین

$$(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}\leq a_1b_1+\cdots+a_nb_n.$$

نامساوی دیگری که بررسی می‌کنیم، نامساوی برنولی است:

نامساوی برنولی. اگر $x\geq 0$ و $r\geq 1$ آنگاه

$$(1+x)^r\geq 1+rx.$$

برهان. تابع $f(x)=(1+x)^r-(1+rx)$ را در نظر بگیرید.

داریم $f(0)=0$، همچنین برای $x\geq 0$،

$$f'(x)=r(1+x)^{r-1}-r=r((1+x)^{r-1}-1)\geq 0$$

(نامساوی فوق از فرض $x\geq 0$ و $r\geq 1$ به‌دست می‌آید)؛ بنابراین تابع f صعودی است و برای $x>0$ داریم

$$f(x)\geq f(0)\Rightarrow(1+x)^r-(1+rx)\geq 0;$$

در نتیجه

$$(1+x)^r\geq(1+rx).$$

■

نامساوی دیگری که اثبات آن می‌پردازیم، نامساوی مینکووسکی است. در واقع، این نامساوی تعمیم نامساوی مثلث است.

نامساوی مینکووسکی. اگر a_1، b_1، a_2 و b_2 نامنفی باشند و $p>1$ آنگاه

$$(a_1^p+b_1^p)^{\frac{1}{p}}+(a_2^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}}\geq((a_1+a_2)^p+(b_1+b_2)^p)^{\frac{1}{p}}$$

برهان. اتحاد

$$(a_1+a_2)^p+(b_1+b_2)^p=(a_1(a_1+a_2)^{p-1}+b_1(b_1+b_2)^{p-1})+(a_2(a_1+a_2)^{p-1}+b_2(b_1+b_2)^{p-1})$$

را در نظر بگیرید. برای هر کدام از دو قسمت طرف راست اتحاد بالا، نامساوی هلدر را به‌کار می‌بریم:

$$a_1(a_1+a_2)^{p-1}+b_1(b_1+b_2)^{p-1} \leq (a_1^p+b_1^p)^{\frac{1}{p}}\left((a_1+a_2)^{(p-1)q}+(b_1+b_2)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

و

$$a_2(a_1+a_2)^{p-1}+b_2(b_1+b_2)^{p-1} \leq (a_2^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}}\left((a_1+a_2)^{(p-1)q}+(b_1+b_2)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

که در آن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. از جمع دو نامساوی اخیر، داریم

$$(a_1+a_2)^p+(b_1+b_2)^p \leq \left((a_1^p+b_1^p)^{\frac{1}{p}}+(a_2^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}}\right)\left((a_1+a_2)^{(p-1)q}+(b_1+b_2)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

و از آنجا که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$، داریم $p=q(p-1)$؛ بنابراین آخرین نامساوی به‌دست آمده را به‌صورت

$$(a_1+a_2)^p+(b_1+b_2)^p \leq \left((a_1^p+b_1^p)^{\frac{1}{p}}+(a_2^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}}\right)\left((a_1+a_2)^p+(b_1+b_2)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

می‌نویسیم و دو طرف این تساوی را بر $\left((a_1+a_2)^p+(b_1+b_2)^p\right)^{\frac{1}{q}}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\left((a_1+a_2)^p+(b_1+b_2)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq (a_1^p+b_1^p)^{\frac{1}{p}}++(a_2^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}}$$

و در نتیجه

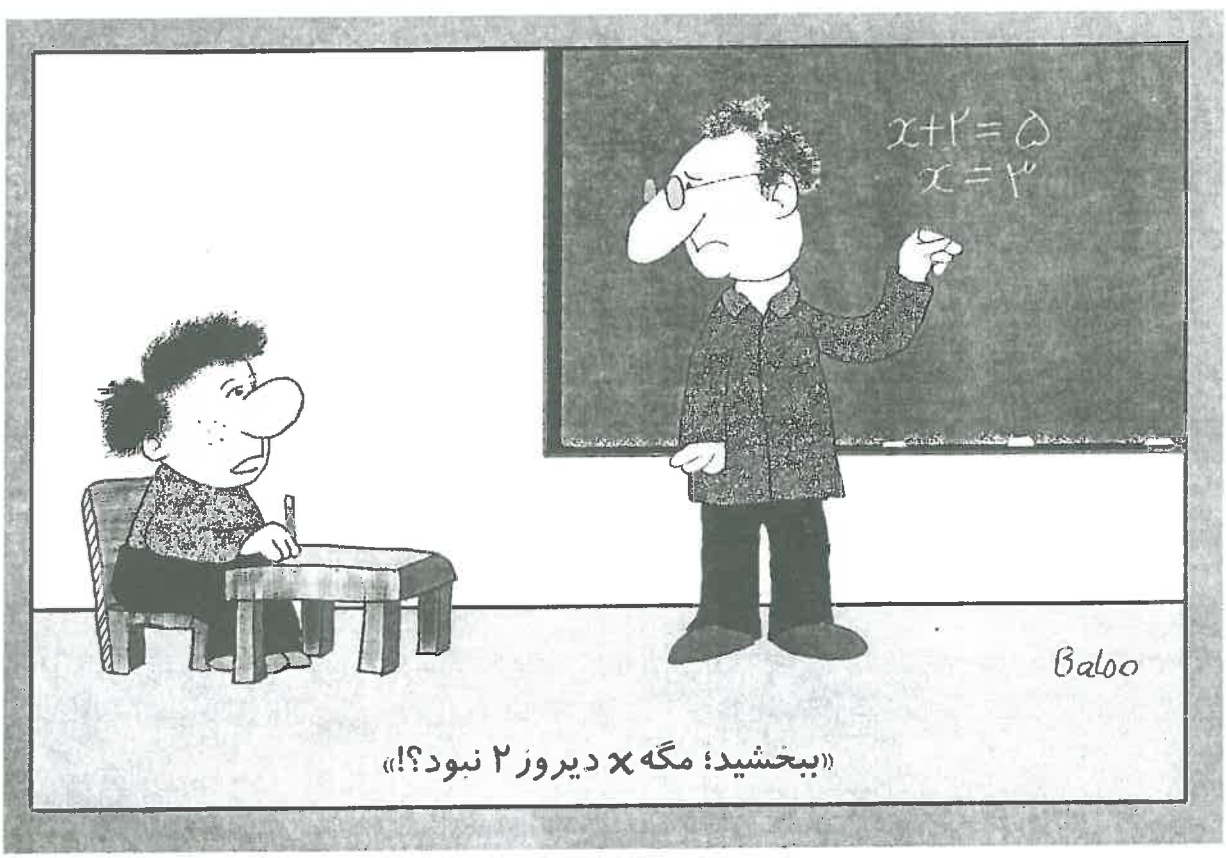
$$\left((a_1+a_2)^p+(b_1+b_2)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (a_1^p+b_1^p)^{\frac{1}{p}}++(a_2^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}}$$

و به این ترتیب اثبات به پایان می‌رسد. ■

البته، شکل کلی‌تر نامساوی مینکووسکی به‌صورت

$$(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1^p+\cdots+b_n^p)^{\frac{1}{p}} \geq \left((a_1+b_1)^p+\cdots+(a_n+b_n)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

است که در آن a_i ها و b_i ها نامنفی هستند و $p \geq 1$.



«ببخشید؛ مگه x دیروز ۲ نبود؟!»

مسأله‌های درسی

• ریاضی ۱ و ۲

۱) معادلهٔ $x - \frac{1}{x} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ را حل کنید.

۲) مخرج کسر $\frac{1}{1+\sqrt[6]{2}+\sqrt[6]{3}}$ را گویا کنید.

۳) با استفاده از این که زاویهٔ محیطی نصف زاویهٔ مرکزی متناظر به همان کمان است، ثابت کنید $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$.

۴) حاصل عبارت $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ را به دست آورید.

• ریاضی ۳ و ۴

۱) حروف الفبای انگلیسی را در یک سطر به طور تصادفی می‌نویسیم. احتمال آن که بین حروف A و B، چهار حرف واقع شده‌باشد را حساب کنید.

۲) به روش برداری ثابت کنید در یک مثلث که طول اضلاع آن a، b و c است، داریم $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$ (A زاویهٔ روبه‌روی ضلع a است).

۳) کدامیک از اعداد 2000^{1379} و 1379^{2000} بزرگترند؟ چرا؟

۴) ثابت کنید $\sin(\cos(x)) < \cos(\sin(x))$.

• جبر و احتمال

۱) اگر R رابطه‌ای روی مجموعهٔ X باشد، کوچک‌ترین رابطهٔ متقارن شامل R را پیدا کنید(برای دو مجموعهٔ A و B، «A کمتر یا مساوی B است» را همان $A \subseteq B$ می‌گیریم).

۲) یک جواب از جواب‌های $x + y = 10$ (x و y حقیقیند) را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که $3 < x < 6$ و $3 < y < 6$ را حساب کنید.

• حسابان ۱ و ۲

۱) پاره‌خط AB به‌طول ۲ واحد را درنظر می‌گیریم. اگر A را روی محور طول‌ها و B را روی محور عرض‌ها قرار دهیم، حداکثر مساحت ممکن برای مثلث OAB چقدر است؟

۲) آیا تابع حقیقی پیوستهٔ ناصفر f وجود دارد که $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$؟

• حساب دیفرانسیل ۱ و ۲

۱) حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ را به‌دست آورید.

۲) فرض‌کنیم تابع حقیقی f در صفر پیوسته است و برای هر دو عدد حقیقی a و b، $f(a+b) = f(a) + f(b)$. ثابت کنید عدد حقیقی λ موجود است که برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = \lambda x$.

۳) نشان دهید که هر چندجمله‌ای با درجهٔ فرد، دست کم یک ریشهٔ حقیقی دارد.

• ریاضیات گسسته

۱) معادلهٔ $x! = y^2$ را حل کنید.

ریاضیات شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص ۲۹ــ۲۸

۲) ثابت کنید $4444^{3333} + 3333^{4444}$ بر هفت بخش‌پذیر است(محسن انواری، شیراز).

۳) با استدلالی ترکیبیاتی، نشان دهید که

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{k}\binom{n}{0} + \binom{m}{k-1}\binom{n}{1} + \cdots + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \binom{m}{0}\binom{n}{k}.$$

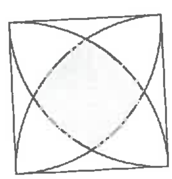
- هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

۱) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. با توجه به این که $A^2 + 3A + 3I = 0$، حاصل A^{1379} را پیدا کنید.

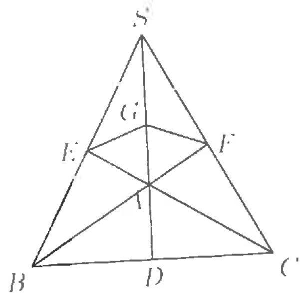
۲) فرض کنید L_1 و L_2 دو خط گذرا از مبدأ باشند و $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را نگاشتی خطی فرض کنید که هر نقطهٔ $x \in \mathbb{R}^2$ را به موازات L_1 روی L_2 تصویر کند. هستهٔ f، امتدادهای ویژه و مقادیر ویژهٔ f را بدون محاسبهٔ ضابطهٔ f به‌دست آورید.

- هندسهٔ ۱ و ۲

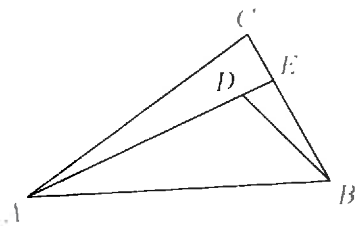
۱) مساحت ناحیهٔ هاشور خورده را به‌دست آورید.



۲) در شکل، فرض‌کنید $AB = AC$ و AD، میانهٔ مثلث ABC، روی امتداد SD واقع باشد. نشان دهید $GE = GF$.

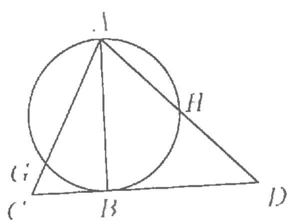


۳) در شکل، ثابت کنید $\hat{C} < \widehat{ADB}$.



۴) در شکل زیر، AB قطر دایره است و CD در نقطهٔ B بر دایره مماس است. ثابت کنید

$$AC \cdot AG = AD \cdot AH.$$



راهنمایی و حل مسأله‌های درسی (شمارهٔ ۱)

- ریاضی ۱ و ۲

۱) لزوماً خیر. به $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ و $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ توجه کنید.

۲) x^4 و x^3 و x^2 را به عبارت اضافه و از آن کم کنید.

- ریاضی ۳ و ۴

۲) به جای ۱، عبارت $\sin^2 x + \cos^2 x$ را قرار دهید.

۳) به کمک اتحاد مزدوج به تصاعد حسابی تبدیل کنید.

۴) $\underbrace{5\ldots5}_{n} = \frac{5}{9}(10^n - 1)$.

- جبر و احتمال

۱) یک مجموعهٔ ده عضوی دلخواه از اعداد ۱ تا ۹۹ در نظر بگیرید. این مجموعه، $2^{10} - 1 = 1023$ زیرمجموعهٔ ناتهی دارد. مجموع این ده عدد به ۱۰۰۰ نمی‌رسد؛ چون همه از ۱۰۰ کمترند. پس، بنا به اصل لانهٔ کبوتری، دو زیرمجموعهٔ ناتهی از این مجموعهٔ ده عضوی موجودند که مجموع اعضایشان برابر است. با حذف اعضای مشترک، مجموعه‌های مطلوب به‌دست می‌آیند.

۲) از اصل لانهٔ کبوتری استفاده کنید.

- حسابان ۱ و ۲

۱) اگر a باشد که $f(a) \neq a$، یا $f(a) < a$ و یا $f(a) > a$. با استفاده از صعودی بودن f به تناقض برسید.

۲) اگر f متناوب باشد، $T \neq 0$ هست که برای هر x حقیقی، $\sin[x+T] = \sin[x]$. این رابطه بالاخص برای $x = 0$ و $x = -T$ هم برقرار است؛ یعنی $\sin[T] = 0$ و $\sin[-T] = 0$. به تناقض $T = 0$ برسید.

۴) از $1 - \frac{1}{x} < [\frac{1}{x}] \leq \frac{1}{x}$ استفاده کنید.

- حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲

۱) توجه کنید که $x \in (0, 1)$ هست که $\int_0^1 f(t)\,dt = f(x)$. حال قضیهٔ رل را به‌کار ببرید.

۲) بنویسید $2x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0$ و به کمک این رابطهٔ بازگشتی، رابطهٔ صریحی برای x_n پیدا کنید.

۳) قضیهٔ رل را برای $g(x) = e^{-x}f(x)$ به‌کار ببرید.

۴) از تغییر متغیر $x = \frac{\pi}{2} - y$ استفاده کنید و انتگرال به‌دست آمده را با انتگرال اولیه جمع کنید.

- ریاضیات گسسته

۲) توجه کنید که $(a+x, b+x) = (a+x, a-b)$.

۳) بسط $(1+x)^n$ را بنویسید و از طرفین مشتق بگیرید.

۴) اگر x جواب باشد، $(x, 5) = 1$. از (پیمانهٔ ۵) $x^4 \equiv 1$ استفاده کنید.

- هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

۲) دترمینان را به پیمانهٔ ۲ حساب کنید.

۳) از فرض داریم $(A - 4I)(B - 3I) = 12I$. از این که «اگر $CD = I$ آنگاه $DC = I$» استفاده کنید.

۴) تبدیل داده شده متناظر $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ است که برابر است با $\sqrt{2}R_{45^\circ}$.

معمای ریسمان آفریقایی

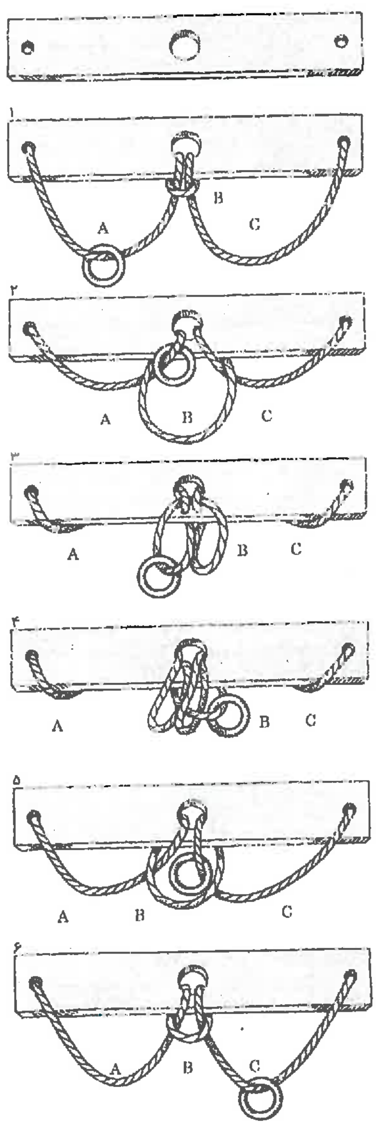
یحیی تابش

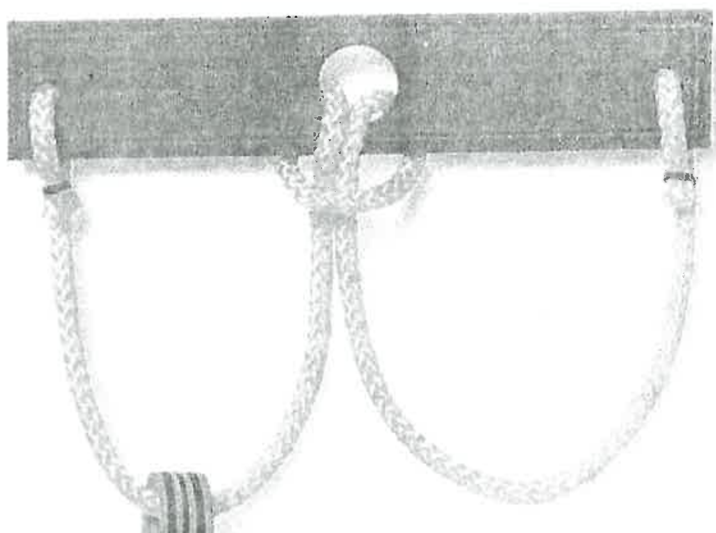
در هندسه ــ به معنای عام آن ــ به مطالعهٔ وضعیت قرارگرفتن اشیا نسبت به هم می‌پردازیم و اشیای هندسی را از نظر وضعیتشان نسبت به معیارهای خاص رده‌بندی می‌کنیم. در این راه، گه‌گاه بررسی متناظر بودن اشیای هندسی معماهای جالبی را شکل می‌دهند. از جملهٔ این معماها، معمای ریسمان آفریقایی است که حتی بین بومیان جنگل‌های نواحی ساحلی گینه در آفریقا هم رایج است.

برای ساختن ابزار این معما، تخته‌ای نازک به طول تقریباً بیست سانتی‌متر و عرض سه سانتی‌متر و کمی ریسمان و یک حلقه نیاز داریم. مثل شکل پایین، تخته را سوراخ کنید و ریسمان را ــ که از داخل حلقه گذشته ــ به تخته متصل کنید.

هدف معما، منتقل کردن حلقه از طرف چپ به طرف راست است! سعی کنید، و اگر موفق نشدید، به راه‌حل نگاه کنید.

می‌توان تنوع بیشتری در این معما ایجاد کرد؛ مثلاً می‌توانیم دو حلقه به رنگ‌های مختلف در طرف راست و چپ ریسمان قرار دهیم و هدف، عوض کردن جای دو حلقه باشد.





آمادگی برای المپیاد ریاضی

هادی سلماسیان

۳. مقدار حاصل جمع $۱ + \cdots + n$ را، که n عددی صحیح و مثبت است، بر حسب n چه‌طور می‌توان محاسبه کرد؟ شاید پاسخ این سؤال را بدانید. داستانی(که در صحتش تردید هست) وجود دارد که اولین یابندهٔ پاسخ را، گاوس [۱]، ریاضیدان آلمانی، آن هم در دوران طفولیتش معرفی می‌کند. بگذارید راه‌حلی را، که البته یافتنش نیاز به صرف وقت و خلاقیت دارد، ارایه کنم. فرض کنید برای هر عدد صحیح و مثبت n، $s(n)$ مقدار حاصل جمع $۱ + \cdots + n$ را نشان دهد. در این صورت

$$
\begin{aligned}
s(n) &= ۱ + ۲ + \cdots + (n - ۱) + n;\\
s(n) &= n + (n - ۱) + \cdots + ۲ + ۱.
\end{aligned}
$$

اکنون جملات نظیر به هم در دو رابطه را جمع بزنید؛ به این نتیجه می‌رسیم که

$$
\begin{aligned}
۲s(n) &= s(n) + s(n)\\
&= (۱ + n) + (۲ + (n - ۱)) + \cdots + ((n - ۱) + ۲) + (n + ۱)\\
&= \underbrace{(n + ۱) + (n + ۱) + \cdots + (n + ۱)}_{n \text{ بار}}\\
&= n(n + ۱).
\end{aligned}
$$

بنابراین، $s(n) = \frac{n(n+۱)}{۲}$. روش بالا، همان شیوهٔ ابتکاری منسوب به گاوس است.

اما شیوهٔ ذکر شده، در مساله‌های دشوارتری مثل محاسبهٔ $۱^۲ + \cdots + n^۲$ یا $۱^۳ + \cdots + n^۳$ دیگر کارآمد نیست و ابتکارات هم ندرتاً به ذهن انسان می‌رسند! حتی فرض کنید که پاسخ را بدانید(مثلاً با انجام محاسبه‌ای برای مقدارهای کوچک n بتوانید به حدس معقولی برسید)؛ چه‌طور می‌توانید صحت آن‌را ثابت کنید؟ خوش‌بختانه، شیوه‌ای به نام استقرای ریاضی [۲] وجود دارد که به کمکمان می‌آید. بگذارید با کمک مثال قبلی به شرح آن بپردازم. فرض کنید با محاسبهٔ $s(۱) = ۱ = \frac{۱\times۲}{۲}$، $s(۲) = ۳ = \frac{۲\times۳}{۲}$ و $s(۳) = ۶ = \frac{۳\times۴}{۲}$ توانسته‌ام حدس بزنم که $s(n) = \frac{n(n+۱)}{۲}$. اکنون نوبت آن است که یک اثبات دقیق ریاضی برای حدسم ارایه کنم. شیوهٔ زیر، اگر بتوانم بر طبقش عمل کنم، معقول به نظر می‌رسد:

گام اول. درستی حدسم را برای $n = ۱$ بررسی کنم.

گام دوم. فرض کنم که حدسم برای یک عدد صحیح مثبت n درست است و با استدلال ریاضی، نتیجه بگیرم که اگر حدسم بخواهد برای این مقدار n درست باشد، باید برای $n + ۱$ هم درست از آب درآید.

«معقول بودن» این روش دلیل ساده‌ای دارد: در حقیقت، روش من چنین است که ابتدا درستی حکم را برای $n = ۱$ بررسی می‌کند، سپس آن‌را برای $n = ۲$ بررسی می‌کند، آن‌گاه به $n = ۳$ می‌پردازد و ... و بنابر گام دوم، این بررسی همیشه به تأیید حدس منجر می‌شود.

به جای حاشیه‌روی، بیایید ببینیم در مثال بالا، دوگام ذکر شده به چه شکلی به‌کار می‌آیند. گام اول روشن است؛ چون $s(۱) = \frac{۱\times۲}{۲}$.

---

۱) Gauss

۲) Mathematical Induction

شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص ۲۵_۳۲

درگام دوم، فرض کنید بدانیم $s(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ که n عدد صحیح و مثبت دلخواهی است. روشن است که

$$\begin{aligned} s(n+1) &= s(n) + (n+1) = \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \tfrac{(n+1)(n+2)}{2}; \end{aligned}$$

یعنی حدس برای $n+1$ هم باید درست باشد و می‌توان مطمئن بود که حدس، ثابت شده است!

تمرین ۶. *با کمک گرفتن از استقرای ریاضی، نشان دهید*

$$1^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + \cdots + n^3 = \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$1 \times 2 + \cdots + n(n+1) = \tfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

استقرای ریاضی را، در مسأله‌هایی از انواع مختلف می‌توان به‌کار برد. به مثال زیر دقت کنید:

مثال ۱. *اگر تمرین ۶ را حل کرده باشید، می‌دانید که $1^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. اکنون فرض کنید a_1، a_2، ... عددهایی صحیح و مثبت باشند که به‌ازای هر عدد طبیعی m،*

$$a_1^3 + \cdots + a_m^3 = (a_1 + \cdots + a_m)^2 \qquad (1)$$

آیا لزوماً برای هر عدد صحیح و مثبت n، تساوی $a_n = n$ برقرار است؟

پاسخ مثبت است. در واقع، به‌کمک استقرای ریاضی، می‌توان این حدس را که «به ازای هر عدد صحیح n، $a_n = n$» ثابت کرد. گام‌های استدلال، چنین هستند:

گام اول. اگر $m = 1$، به‌کمک رابطهٔ (۱)، باید $a_1^3 = a_1^2$، و چون a_1 صحیح و مثبت است، $a_1 = 1$.

گام دوم. این مرحله با آنچه به‌عنوان گام دوم معرفی شده بود، قدری تفاوت دارد. البته دلیل موجه بودن شیوهٔ استدلالی که برخواهم گزید، خیلی شبیه به قبل خواهد بود. تفاوت شیوهٔ فعلی با گام دومی که قبلاً معرفی شد، در این است که فرض می‌کنم حدسم نه‌تنها برای مقدار n، بلکه برای مقدارهای $n-1$، $n-2$، ...، ۲، و ۱ نیز برقرار است؛ به عبارتی، فرض می‌کنم که $a_1 = 1$، $a_2 = 2$، ...، $a_{n-1} = n-1$ و $a_n = n$ و نشان می‌دهم که با این فرض‌ها، می‌توانم نتیجه بگیرم $a_{n+1} = n+1$؛ یعنی حدسم برای $n+1$ هم درست است. توجه کنید که اگر $m = n+1$، به‌کمک رابطهٔ (۱)، نتیجه می‌شود که

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + a_{n+1}^3 = (1 + 2 + \cdots + n + a_{n+1})^2$$

و با استفاده از تمرین ۶، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 + a_{n+1}^3 &= \left(\tfrac{n(n+1)}{2} + a_{n+1}\right)^2 \\ &= \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 2a_{n+1}\left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right) + a_{n+1}^2 \end{aligned}$$

که با ساده کردن، به

$$a_{n+1}(a_{n+1} - (n+1))(a_{n+1} + n) = 0$$

می‌رسیم و چون a_{n+1} نیز عددی صحیح و مثبت است، باید $a_{n+1} = n+1$؛ یعنی حدس برای $n+1$ هم برقرار است.

یک مسأله از اولین المپیاد بین‌المللی کامپیوتر

یحیی تابش

اولین المپیاد بین‌المللی انفورماتیک (کامپیوتر) در سال ۱۹۸۹ در کشور بلغارستان برگزار شد. در این المپیاد، به‌طور عمده مسأله‌هایی مطرح می‌شوند که به خلاقیت‌هایی در تفکر الگوریتمی توجه دارند. در زیر به یکی از مسأله‌های اولین المپیاد توجه می‌کنیم که تفکر الگوریتمی به نحو بارزی در آن مشاهده می‌شود.

مسأله. $2n$ جعبه داریم که کنار هم قرار گرفته‌اند. دو جعبهٔ متوالی از این جعبه‌ها خالی هستند(این جعبه‌ها هر کجا می‌توانند قرار داشته باشند) و $n-1$ جعبه حاوی حرف A و $n-1$ جعبهٔ دیگر حاوی حرف B هستند؛ مثلاً برای $n=5$ یکی از حالت‌های ممکن به صورت $ABBA00ABAB$ است.

قاعدهٔ جابه‌جایی این علامت‌ها از این قرار است که محتوای هر دو تا جعبهٔ مجاور و غیر خالی را می‌توان با حفظ ترتیب به جعبه‌های خالی منتقل کرد. هدف این است که با استفاده از این قاعده، همهٔ A ها را به سمت چپ و همهٔ B ها را به سمت راست ببریم(این که جعبه‌های خالی کجا قرار گیرند هیچ اهمیتی ندارد).

برنامه‌ای بنویسید که:

۱) از صفحهٔ کلید، حالت اولیه را به صورت دنباله‌ای از A ها و B ها و صفر برای جعبه‌های خالی دریافت کند؛

۲) برای حالت اولیهٔ داده‌شده، حداقل یک روش تغییر محل را ارایه کند تا به جواب برسیم و یا منعکس کند که جوابی وجود ندارد(خروجی باید شامل حالت اولیه و کلیهٔ مراحل تا رسیدن به جواب مطلوب باشد)؛

۳) روشی برای رسیدن به جواب مطلوب با کمترین تغییرات ارایه کند.

حل. هیأت داوران اولین المپیاد، راه حل ای. تودوروف[1] از کشور بلغارستان را به عنوان کامل‌ترین راه حل برگزیدند. تودوروف تحلیل کاملی از مسأله ارایه داده و نشان داده است که برای $n > 3$ جواب وجود دارد. $n=1$ که مطرح نیست و برای $n=2$، دو حالت داریم: یا علامت‌ها ترتیب مورد نظر را دارند و یا مرتب نیستند. در حالتی که علامت‌ها از ابتدا مرتب نباشند، جوابی وجود ندارد.

به حالت $n=3$ باید توجه ویژه‌ای معطوف کنیم: در این حالت دنباله‌هایی وجود دارند که قابل مرتب کردن نیستند؛ مثلاً $BB00AA$ قابل مرتب کردن است و $ABAB00$ نه.

بالأخره، برای $n > 3$ جواب وجود دارد. فرض کنید در $k \geq 0$ جعبه حرف A داریم و نشان می‌دهیم که چگونه در جعبهٔ $k+1$ ام یک Aی جدید وارد کنیم. فرض کنید به حالت $A_1A_2A_3\ldots A_kXX\ldots X$ $(k \geq 0, x \in \{A, B, 0\})$ رسیده‌ایم. اگر جعبهٔ $k+1$ ام حاوی A باشد که مسأله حل است؛ در غیر این صورت، این جعبه یا خالی(همان ۰) است و یا حاوی B و در حالت اخیر، پس از آن جعبهٔ حاوی ۰ قرار دارد و یا A یا B. هر یک از حالات فوق را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱) E. Todorov

ریاضیات شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص ۳۹ـ۴۶

- حالت ۱: $A_1A_2\ldots A_k\circ\circ XX\ldots X$. روی X ها جلو می‌رویم تا به اولین زوجی برسیم که مؤلفهٔ اولشان A باشد و این دو تا را در جعبه‌های خالی $k+1$ و $k+2$ قرار می‌دهیم. اگر چنین زوجی موجود نباشد، آنگاه داریم:

۱) $k=n-1$، که دنبالهٔ مرتب شده است؛

۲) $k=n-2$، حالت زیر واقع می‌شود که به ترتیب زیر تغییرشان می‌دهیم تا به جواب برسیم:

$$A_1A_2A_3\ldots A_{n-2}\circ\circ B_1B_2B_3\ldots B_{n-1}A$$
$$A_1A_2A_3\ldots A_{n-2}BABBB\ldots B\circ\circ$$
$$A_1A_2A_3\ldots A_{n-2}B\circ\circ B_1B_2B_3\ldots B_{n-2}AB$$
$$A_1A_2A_3\ldots A_{n-2}BBB\circ\circ B\ldots BAB$$
$$A_1A_2A_3\ldots A_{n-2}\circ\circ BBBB\ldots BAB$$
$$A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}B_1B_2B_3\ldots B_{n-1}\circ\circ$$

- حالت ۲: $A_1A_2A_3\ldots A_kB\circ\circ XX\ldots X$؛ که با یک جابه‌جایی به $A_1A_2A_3\ldots A_kBXX\circ\circ XX\ldots X$ تبدیل می‌شود و سپس به $A_1A_2A_3\ldots A_k\circ\circ XBXX\ldots X$، که به همان حالت ۱ منجر می‌شود.

- حالت ۳: $A_1A_2A_3\ldots A_kBYXX\ldots X$ که Y یا A است یا B، و X یا A یا B و یا $\circ$ است. محل جفت BY و اولین زوجی که با A شروع می‌شود را عوض می‌کنیم و دوباره به حالت ۱ رسیده‌ایم.

برای یافتن جواب می‌نیمم(یعنی جوابی با کمترین تعداد تغییرات مورد نیاز)، باید کلیهٔ حالات ممکن را در نظر گرفت و مقدار می‌نیمم را پیدا کرد. اگر حالت اولیه به صورت a b b a 0 0 a b a b در نظر گرفته شود، یک جواب به صورت زیر است:

```
b a b a b b a 0 0 a
b a b a b 0 0 b a a
b a b 0 0 a b b a a
b a b b b a 0 0 a a
b a b b 0 0 b a a a
b a 0 0 b b b a a a
b a b b b 0 0 a a a
0 0 b b b b a a a a
```

و جواب می‌نیمم با سه گام:

```
b a b a 0 0 a b b a
b 0 0 a a b a b b a
b b b a a b a 0 0 a
b b b 0 0 b a a a a
```

■

حال به متن برنامهٔ ای. تودوروف که به زبان پاسکال نوشته شده است توجه کنید:

```
program IOI_89 ;

var
      box , box1  :  array [ 1 .. 1000 ]  of Char ;
      st , stt          :  array [ 1 .. 1000 ]  of Byte ;
      spn , n , max ,
      em , em1 , mm  :  Integer ;
      flag              :  Boolean ;

procedure Input ;
var
      i  :  Integer ;
begin
      em  :=  0 ;
      Writeln ;  Write ( 'n = ' ) ;  ReadLn ( n ) ;  Writeln ;
      Writeln ( 'Please enter contents of following
      boxes:   ' ) ;
      for i  :=  1 to 2 * n do
      begin
            Write ( i : 3 ,  ' :  ' ) ;
            ReadLn ( box [ i ] ) ;
            box1 [ i ]   :=  box [ i ] ;
            if  ( box [ i ]   =  '0' )  and  ( em  =  0 )
            then em  :=  i ;
      end  { for } ;
      em1  :=  em ;
      Writeln ( ' Initial state:   ' ) ;
end  { Input } ;

function Check  :  Boolean ;
var
      i  :  Integer ;
      last  :  Char ;
begin
      last  :=  box1 [ 1 ] ;
      for i  :=  2 to 2 * n do
      begin
            if  ( box1 [ i ]   =  'a' )  and  ( last  =  'b' )
            then
            begin
                  Check  :=  False ;
                  Exit ;
            end ;
            if  ( box1 [ i ]   < >  '0' )  then
                  last  :=  box1 [ i ] ;
      end  { for } ;
      Check  :=  n  >  1 ;
end  { Check } ;

procedure Print ;
var
      i  :  Integer ;
begin
      for i  :=  1 to 2 * n do
            Write ( box1 [ i ] ,  '  ' ) ;
      Writeln ;
end  { Print } ;

procedure Move  ( pos  :  Integer ) ;
begin
      spn  :=  spn  +  1 ;
      box1 [ em1 ]   :=  box1 [ pos ] ;  box1 [ pos ]   :=  '0' ;
      box1 [ em1 + 1 ]   :=  box1 [ pos + 1 ] ;
      box1 [ pos + 1 ]   :=  '0' ;
      em1  :=  pos ;
      Print ;
end  { Move } ;

procedure Move1  ( pos  :  Integer ) ;
begin
      spn  :=  spn  +  1 ;
      box1 [ em1 ]   :=  box1 [ pos ] ;  box1 [ pos ]   :=  '0' ;
      box1 [ em1 + 1 ]   :=  box1 [ pos + 1 ] ;
      box1 [ pos + 1 ]   :=  '0' ;
      em1  :=  pos ;
      st [ spn ]   :=  pos ;
end  { Move1 } ;

procedure FindWay ;
var
      k ,  t  :  Integer ;
begin
      Writeln ( 'A solution:   ' ) ;
      spn  :=  0 ;  k  :=  0 ;
      while  ( not Check )  and  ( k  <  n  -  1 )  do
      begin
            if box1 [ k  +  1 ]   =  'a' then
                  k  :=  k  +  1
            else
            begin
                  if box1 [ k  +  1 ]   =  'b' then
                  begin
                        if box1 [ k  +  2 ]   =  '0' then
                              Move  ( em1  +  2 ) ;
                        Move  ( k  +  1 ) ;
                  end  { if } ;
                  t  :=  k  +  1 ;
                  repeat
                        t  :=  t  +  1
                  until box1 [ t ]   =  'a' ;
                  if t  <  2 * n then
                        Move  ( t )
                  else
```

```
                begin
                    Move ( t - 1 ) ;
                    Move ( k + 2 ) ;
                    Move ( k + 4 ) ;
                    Move ( k + 1 ) ;
                    if not Check then
                        Move ( 2 * n - 1 ) ;
                end { else } ;
                k := k + 1 ;
            end { else } ;
        end { while } ;
end { FindWay } ;

procedure Back ;
var
    i , j : Integer ;
begin
    em1 := em ;
    for i := 1 to 2 * n do
        box1 [ i ] := box [ i ] ;
    j := spn - 1 ; spn := 0 ;
    if j = 0 then
        flag := False
    else
        for i := 1 to j do
            Move1 ( st [ i ] ) ;
end { Back } ;

procedure ForWrd ;
var
    t : Integer ;
begin
    if spn < mm then
    begin
        t := 1 ;
        while ( box1 [ t ] = '0' ) or
         ( box1 [ t + 1 ] = '0' ) do
            t := t + 1 ;
        Move1 ( t ) ;
    end { then }
    else
    begin
        repeat
            t := st [ spn ] ; Back ;
            repeat
                t := t + 1
            until ( t = 2 * n ) or
                ( ( box1 [ t ] <> '0' ) and
                ( box1 [ t + 1 ] <> '0' ) ) ;
            if t < 2 * n then
                flag := True ;
        until ( t < 2 * n ) or ( not flag ) ;
        if t < 2 * n then
            Move1 ( t ) ;
    end { else } ;
end { ForWrd } ;
procedure FindMin ;
var
    i : Integer ;
begin
    if Check then
    begin
        mm := spn ; em1 := em ;
        for i := 1 to 2 * n do
            box1 [ i ] := box [ i ] ;
        max := mm + 1 ; spn := 0 ;
        flag := True ;
        while flag and ( spn <= mm ) do
        begin
            if Check and ( max > spn ) then
            begin
                max := spn ;
                for i := 1 to max do
                    stt [ i ] := st [ i ] ;
                mm := max ;
            end { if } ;
            ForWrd ;
        end { while } ;
        Writeln ; Writeln ( 'The minimal
        solution:  ' , max , ' steps.' ) ;
        for i := 1 to 2 * n do
            box1 [ i ] := box [ i ] ;
        em1 := em ; Print ;
        for i := 1 to max do Move ( stt [ i ] ) ;
    end { then }
    else
        Writeln ( ' No Way.  ' ) ;
end { FindMin } ;

begin { E_Todorov }
    Input ; Print ;
    FindWay ; FindMin ;
end { IOI_89 } .
```

میانگین یک تابع

مازیار میررحیمی

مقدمه

بدون شک می‌دانید که معنای میانگین حسابی چند عدد چیست. در این مقاله، این مفهوم را به توابع تعمیم می‌دهیم و بعضی از کاربردهای غیر منتظره و زیبای آن را در حل مسایل مختلف نشان می‌دهیم. امیدوارم زیاد هیجان‌زده نشوید!

خواندن این مقاله به معلومات زیادی نیاز ندارد، جز کمی از هندسهٔ بردارها. شاید نگاهی به مقاله بیندازید و چند نماد انتگرال در آن ببینید و بگویید «ای بابا، باز هم حساب دیفرانسیل و انتگرال لازم دارد» و بخواهید مقاله را پاره کرده و دور بریزید؛ اما دست نگه دارید! از نماد انتگرال فقط برای نمایش مساحت زیر نمودار استفاده کرده‌ایم و شما نیاز به هیچ دانستهٔ خاصی در حساب دیفرانسیل و انتگرال ندارید.

به سراغ مقاله می‌رویم: ابتدا برای مجموعه‌های متناهی میانگین را در نظر می‌گیریم و از آن در حل مسأله‌ای زیبا استفاده می‌کنیم و بعد، مقدار میانگین یک تابع روی یک بازه را تعریف و از آن استفاده می‌کنیم و کار را با مسایلی جالب ادامه می‌دهیم.

میانگین‌گیری روی مجموعه‌ای متناهی

همان‌طور که قبلاً دیده‌اید، اگر n عدد $x_1, \ldots, x_n$ داشته‌باشیم، میانگین حسابی این n عدد عبارت است از

$$M(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

این میانگین، دارای خواص زیر است که همگی را به‌راحتی می‌توان دید:

۱) $M(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = M(x_1, \ldots, x_n) + M(y_1, \ldots, y_n)$؛

۲) $M(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha M(x_1, \ldots, x_n)$؛

۳) $\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq M(x_1, \ldots, x_n) \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$.

به‌عنوان تمرین، ابتدا خواص بالا را ثابت کنید و بعد نشان دهید که برای هر $n > 1$ طبیعی داریم

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n-1}}{n}.$$

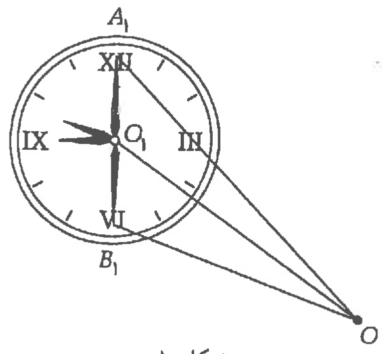
حال به بیان کاربردی از میانگین حسابی در حل مسأله‌ای زیبا می‌پردازیم(این مسأله در یکی از المپیادهای ریاضی داخلی شوروی سابق مطرح شده است). پیشنهاد می‌کنم قبل از خواندن راه حل، کمی فکر کنید.

مسأله ۱. *پنجاه ساعت مچی عقربه‌ای که کاملاً درست کار می‌کنند را روی میزی گرد گذاشته‌ایم. ثابت کنید زمانی خاص هست که مجموع فواصل بین مرکز میز و نوک عقربه‌های دقیقه‌شمار بیشتر از مجموع فواصل بین مرکز میز و مرکز ساعت‌ها باشد.*

ریاضیات شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص. ۴۵ـ۴۰

حل. شاید مسأله در نگاه اول کمی مشکل به‌نظر برسد؛ ولی خواهیم دید که با استفاده‌ای بسیار ساده و ابتدایی از مفهوم و خواص میانگین، مسأله به زیبایی حل می‌شود.

ابتدا تابع $f(t)$ را برابر مجموع فواصل نوک عقربه‌های دقیقه‌شمار در زمان t(بر حسب ساعت) و نقطهٔ O ــ مرکز میز ــ تعریف می‌کنیم. فرض‌کنید d مجموع فواصل بین O و مراکز ساعت‌ها باشد؛ بایدد ثابت کنیم که زمانی مثل t هست که $f(t) > d$.



شکل ۱

ثابت می‌کنیم که زمانی مثل t_0 هست که $M(f(t_0), f(t_0 + \frac{1}{2})) > d$؛ پس

$$\max\{f(t_0), f(t_0 + \tfrac{1}{2})\} \geq M(f(t_0), f(t_0 + \tfrac{1}{2})) > d$$

و حل مسأله تمام خواهد شد.

فرض‌کنید که O_i، A_i و B_i به ترتیب مرکز ساعت i ام، نوک عقربهٔ دقیقه‌شمارَش در زمان t و نوک عقربهٔ دقیقه‌شمارش در زمان $t + \frac{1}{2}$ باشد. چون همهٔ ساعت‌ها درست کار می‌کنند، یک زمان t_0 هست که در آن، O و A_1 و B_1 روی یک خط نیستند و در نتیجه OO_1 میانهٔ OA_1B_1 است. به‌عنوان تمرین، می‌توانید ثابت کنید که میانهٔ یک مثلث از نصف مجموع اضلاع متناظر آن رأس کمتر است؛ یعنی

$$OO_1 < \frac{OA_1 + OB_1}{2}.$$

از طرفی برای تمام ساعت‌های دیگر هم داریم

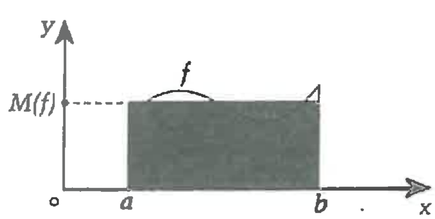
$$OO_i \leq \frac{OA_i + OB_i}{2}.$$

حال اگر این پنجاه نامساوی را با هم جمع کنیم، $d < M(f(t_0), f(t_0 + \frac{1}{2}))$ را به‌دست می‌آوریم. ■

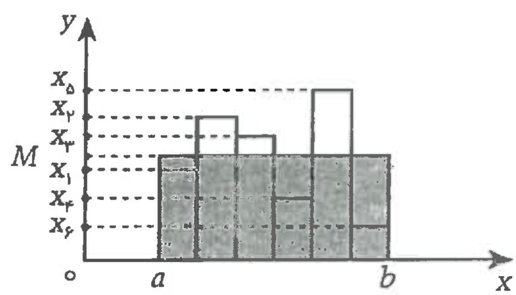
میانگین‌گیری روی یک بازه

در مسألهٔ اول، کافی بود که میانگین حسابی دو مقدار از یک تابع تخمین زده شود. آیا ممکن است که میانگین تمام مقادیر را تعریف کنیم؟ برای رسیدن به چنین تعریفی، به شهودی هندسی از میانگین حسابی n عدد مثبت $x_1, \ldots, x_n$ نیاز داریم.

بازه‌ای مثل $[a, b]$ را به n قسمت مساوی به طول‌های $\frac{b-a}{n}$ تقسیم کرده و روی این قسمت‌های مساوی، مستطیل‌هایی با قاعدهٔ این قسمت‌ها و به ارتفاع x_i ها رسم کنید. مساحت این شکل، برابر است با $M(x_1, \ldots, x_n) \cdot (b - a)$؛ پس $M(x_1, \ldots, x_n)$ برابر است با ارتفاع مستطیلی با قاعدهٔ $[a, b]$ و مساحتی برابر این شکل.



شکل ۳



شکل ۲

حال تابع نامنفی پیوستهٔ f را روی بازهٔ $[a,b]$ در نظر بگیرید؛ منظور از میانگین f روی $[a,b]$، ارتفاع مستطیلی با قاعدهٔ $[a,b]$ است که مساحت آن با مساحت «ذوزنقهٔ منحنی‌الخط» تشکیل شده با خط‌های $x=a$، $x=b$، محور x ها و نمودار f برابر است. این مساحت را با $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می‌دهیم؛ پس $\int_a^b f(x)\,dx$، مساحت زیر نمودار تابع f در بازهٔ $[a,b]$ است و بنا بر این، مقدار میانگین تابع f روی $[a,b]$ به‌صورت

$$M(f)=\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

تعریف می‌شود. به‌راحتی می‌توان دید که خواصی مشابه خواص میانگین روی مجموعه‌های متناهی، برای این میانگین هم برقرار است؛ یعنی

(۱′ $M(f+g)=M(f)+M(g)$؛

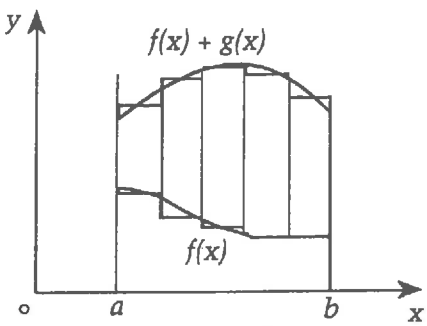
(۲′ $M(\alpha f)=\alpha M(f)$؛

(۳′ $\min_{a\le x\le b} f(x)\le M(f)\le \max_{a\le x\le b} f(x)$.

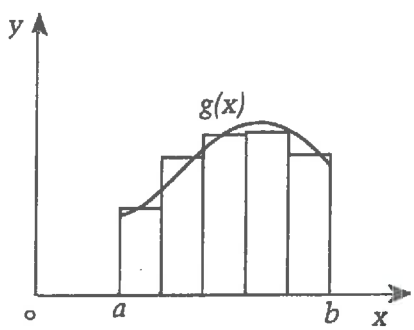
این خواص به سادگی از تعریف‌ها نتیجه می‌شوند؛ برای مثال، خاصیت اول را ثابت می‌کنیم: کافی‌ست نشان دهیم مساحت بین نمودار f و $f+g$ با مساحت زیر نمودار g برابر است. برای این کار، این ناحیه را با خط‌های موازی محور y ها به نوارهایی تقسیم می‌کنیم. از آنجا که می‌توان این نوارها را به‌طور دلخواه کوچک در نظر گرفت، به‌راحتی دیده می‌شود که

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx,$$

که همان چیزی‌ست که می‌خواستیم ثابت کنیم.



شکل ۴ الف



شکل ۴ ب

به‌عنوان تمرین، خاصیت زیر را هم ثابت کنید:

(۴′ اگر برای هر $x\in[a,b]$ داشته‌باشیم $f(x)\le g(x)$ آنگاه $M(f)\le M(g)$.

حال به مسألهٔ دوم می‌پردازیم. این مسأله هم از مسایل المپیادهای شوروی انتخاب شده.

مسأله ۲. *مجموع چهار بردار* $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ *و* $\mathbf{d}$ *در صفحه صفر است. ثابت کنید که*

$$|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|+|\mathbf{c}|+|\mathbf{d}|\ge|\mathbf{a}+\mathbf{d}|+|\mathbf{b}+\mathbf{d}|+|\mathbf{c}+\mathbf{d}|;$$

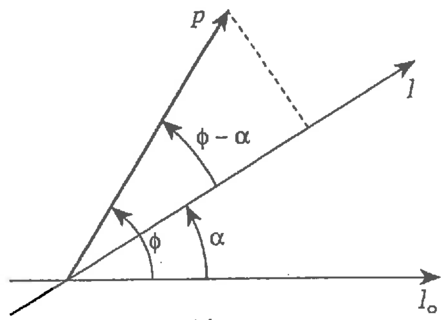
که در آن $|\mathbf{a}|$ *طول بردار* $\mathbf{a}$ *است.*

حل. حل مسأله، وابسته به حل این مسأله است که برای هر چهار عدد حقیقی a و b و c و d با جمع صفر،

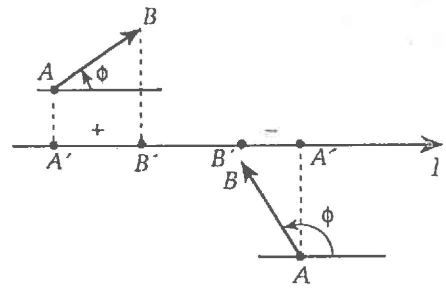
$$|a|+|b|+|c|+|d|\ge|a+d|+|b+d|+|c+d|.$$

حالا به اثبات مسألهٔ اصلی می‌پردازیم:

تصویرهای **a**، **b**، **c** و **d** را روی محوری دلخواه در نظر بگیرید؛ برای این کار، تصویر بردار $\overrightarrow{AB}$ را روی محور l به‌عنوان $\pm A'B'$ در نظر می‌گیریم که A' و B' به‌ترتیب تصویرهای A و B روی l هستند و علامت با توجه به مثبت یا منفی بودن جهت $\overrightarrow{A'B'}$ انتخاب می‌شود. به‌عبارت دیگر، $A'B'$ برابر است با $AB \cdot \cos\phi$ که ϕ زاویهٔ بین l و $\overrightarrow{AB}$ است. تصویرهای بردارهایمان روی محوری مثل l در فرض مسأله‌مان صدق می‌کنند.



شکل ۶



شکل ۵

حال محوری مثل $l_\circ$ را ثابت می‌گیریم و برای هر **p**، تابع $p(\alpha)$ را برابر تصویر **p** روی محور l_α ــ محوری که با $l_\circ$ زاویهٔ α می‌سازد ــ بگیرید.

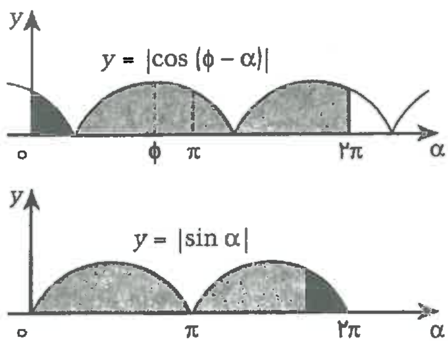
اگر زاویهٔ بین $l_\circ$ و **p** برابر ϕ باشد آنگاه $p(\alpha) = |\mathbf{p}|\cos(\phi - \alpha)$. حال مقدار میانگین $M(|p|)$ از تابع $\alpha \mapsto |p(\alpha)|$ را روی $[۰, ۲\pi]$ در نظر بگیرید؛ با استفاده از خاصیت دوم میانگین داریم

$$M(|p|) = |\mathbf{p}| \cdot M(|\cos(\phi - \alpha)|)$$

و

$$M(|\cos(\phi - \alpha)|) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} |\cos(\phi - \alpha)|\, d\alpha.$$

از شکل، معلوم است که مساحت زیر نمودار $|\cos(\phi - \alpha)|$ روی $[۰, ۲\pi]$ برابر است با مساحت زیر نمودار $|\sin\alpha| = |\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha)|$ روی $[۰, ۲\pi]$؛ پس $M(|\cos(\phi - \alpha)|) = M(|\sin\alpha|)$. حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌گوید که این مساحت برابر ۴ است.



شکل ۷

چیزی که برای ما اهمیت دارد این است که این مقدار مثبت است و به ϕ بستگی ندارد و در نتیجه مقدار میانگین $p(\alpha)$ متناسب است با طول **p**؛ یعنی به‌ازای ضریب ثابتی مثل k، $M(|p|) = k|\mathbf{p}|$(با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال، می‌بینیم که $k = \frac{۲}{\pi}$).

واضح است که برای هر $\alpha \in [۰, ۲\pi]$، جمع $a(\alpha)$، $b(\alpha)$، $c(\alpha)$ و $d(\alpha)$ صفر است؛ پس با تمرینی که ثابت کردید،

$$|a(\alpha)| + |b(\alpha)| + |c(\alpha)| + |d(\alpha)| \geq |a(\alpha) + d(\alpha)| + |b(\alpha) + d(\alpha)| + |c(\alpha) + d(\alpha)|.$$

حال از طرفین میانگین می‌گیریم و با توجه به این که $M(|p|) = k|\mathbf{p}|$،

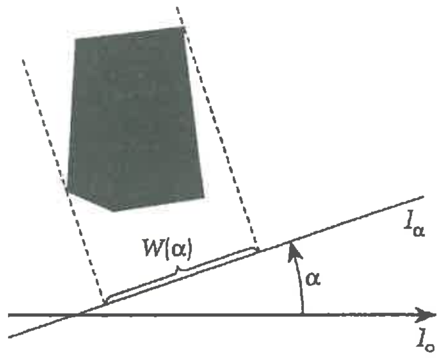
$$k|\mathbf{a}| + k|\mathbf{b}| + k|\mathbf{c}| + k|\mathbf{d}| \geq k|\mathbf{a} + \mathbf{d}| + k|\mathbf{b} + \mathbf{d}| + k|\mathbf{c} + \mathbf{d}|;$$

پس

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|.$$

■

طول بر حسب پهنا



شکل ۸

همان ایدهٔ بخش قبل می‌تواند در حل یک مسألهٔ زیبای هندسی کمکمان کند: در این قسمت می‌خواهیم روشی برای پیدا کردن کرانی برای محیط چند ضلعی محدب بیابیم. فرض کنید $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ اضلاع متوالی یک n ضلعی محدب باشند. محوری مثل $l_\circ$ را ثابت می‌گیریم و پهنای چند ضلعی در جهت l_α — محوری که با $l_\circ$ زاویهٔ α می‌سازد — را با $W(\alpha)$ نشان می‌دهیم. بد نیست که منظورمان را از پهنای شکل در جهت l_α بیان کنیم: به‌طور کلی، وقتی می‌گوییم می‌خواهیم پهنای شکل را در جهت محور l پیدا کنیم، منظور این است که از دو طرف شکل، دو خط موازی و عمود بر l را تا جایی که شکل را نبُرند(یعنی فقط بر شکل مماس شوند) به هم نزدیک کنیم. در این حالت، فاصلهٔ بین این دو خط موازی را پهنای شکل در جهت l می‌نامیم.

اکنون نشان می‌دهیم که اگر مقدار این پهنا را در هر جهتی بدانیم(یعنی اگر $W(\alpha)$ را بر حسب α محاسبه کنیم) آنگاه می‌توانیم محیط شکل را به‌دست بیاوریم. بگذارید ببینیم چرا این طور است: اگر طول تصویر ضلع $\mathbf{a}_i$ روی l_α را به $a_i(\alpha)$ نمایش دهیم آنگاه

$$W(\alpha) = \frac{1}{2}(a_1(\alpha) + \cdots + a_n(\alpha))$$

(ثابت کنید!). در حل مسألهٔ قبل، دیدیم که مقدار میانگین تابع $\alpha \mapsto |a_i(\alpha)|$ با طول $\mathbf{a}_i$ متناسب است و گفتیم که ضریب این طول در تناسب، $k = \frac{2}{\pi}$ است. از خواص میانگین و حکمی که ثابت کردید، می‌توان دید که مقدار $M(W)$ برابر است با نصف حاصل جمع مقادیر میانگین تابع‌های $\alpha \mapsto |a_i(\alpha)|$؛ پس

$$M(W) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}|\mathbf{a}_1| + \cdots + \frac{2}{\pi}|\mathbf{a}_n|\right) = \frac{1}{\pi}P;$$

که P محیط چند ضلعی است. با توجه به تعریف میانگین، نهایتاً خواهیم داشت

$$P = \pi M(W) = \pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} W(\alpha)\, d\alpha;$$

پس محیط چند ضلعی را می‌توان بر حسب W بیان کرد.

حالا واضح است که اگر تمام اضلاع و اقطار چند ضلعی از d کمتر باشند، محیط از πd کمتر است؛ چون به راحتی می‌توانید نشان دهید که پهنای چند ضلعی از d کمتر است و در نتیجه، مقدار $\int_0^{2\pi} W(\alpha)\, d\alpha$(که مساحت زیر نمودار $W(\alpha)$ است) از مساحت زیر نمودار تابع ثابت $y = d$ کمتر است و در نتیجه مساحت زیر این نمودار در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ از $2\pi d$ کمتر است؛ پس

$$P = \pi M(W) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} W(\alpha)\, d\alpha \le \frac{1}{2} \cdot 2\pi d = \pi d$$

که این موضوع، به خودی خود، بسیار جالب و حیرت آور است. این نتیجه، برای هر خم مسطح بستهٔ محدب با قطر کمتر از d برقرار است. روشی که گفته شد را اولین بار ریاضیدان مشهور لهستانی اشتین‌هاوس در سال ۱۹۳۰ میلادی مطرح کرد.

طول مجموع

مسأله ۳. *مجموع طول‌های بردارهای $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ روی صفحه برابر واحد است. نشان دهید که می‌توانیم تعدادی از این بردارها را طوری انتخاب کنیم که طول مجموع آنها از $\frac{1}{\pi}$ کمتر نباشد.*

مسأله را طبق طرح زیر حل کنید:

ابتدا تصویر کاذب یک بردار روی یک محور را اگر زاویهٔ بین بردار و محور حاده باشد همان اندازهٔ جبری تصویر معمولی و در غیر این صورت صفر تعریف کنید. محور دلخواه $l_{\circ}$ را ثابت بگیرید؛ اگر زاویهٔ بین بردار $\mathbf{p}$ و $l_{\circ}$ برابر ϕ باشد، تصویر کاذب $\mathbf{p}$ روی محور l_α را می‌توان به‌صورت $|\mathbf{p}|g(\phi-\alpha)$ نوشت که

$$g(x)=\begin{cases}\cos x & \text{اگر } \cos x > ۰ \text{،}\\ ۰ & \text{اگر } \cos x \leq ۰ \text{،}\end{cases}$$

حال، آنها که کمی حساب دیفرانسیل و انتگرال بلدند، به‌عنوان تمرین ثابت کنند که $\int_{۰}^{۲\pi} g(\phi-\alpha)\,d\alpha = ۲$ (اگر حساب دیفرانسیل و انتگرال نمی‌دانید، این واقعیت را قبول کنید و به حل تمرین‌های بعدی و نتیجه‌گیری نهایی بپردازید).

تابع $f(\alpha)$ را مجموع تصویرهای کاذب بردارهایمان روی l_α تعریف کنید و حکم‌های زیر را به‌عنوان تمرین ثابت کنید و خود با نتیجه‌گیری از این تمرین‌ها، مسأله را حل کنید:

۱) $M(f)$ روی $[۰, ۲\pi]$ برابر $\frac{۱}{\pi}$ است؛

۲) مجموع تصویرهای کاذب بردارهای داده‌شده روی محور خاص l_α ناکمتر از $\frac{۱}{\pi}$ است.

ثابت $\frac{۱}{\pi}$ را در مسألهٔ ۳ نمی‌توان با عددی بزرگ‌تر عوض کرد. این موضوع را با در نظرگرفتن یک n به اندازهٔ کافی بزرگ و بردارهایی که روی ضلع‌های n ضلعی منتظم در نظرگرفته‌شده‌اند به راحتی می‌توان دید.

شمارهٔ بعدی

در شهریور ۱۳۷۹ منتشر می‌شود. تابستانتان خوش و پربار!

در شماره‌های آینده می‌خوانید:

ــ آرش در سیارهٔ تویاپ	ایمان افتخاری
ــ شاخص اویلر(قسمت دوم)	امید نقشینه‌ارجمند
ــ تقارن و کاربردهای آن	محسن بیاتی
ــ مورچه‌ای روی مکعب	ماجد طاهری
ــ راهکارهای حل مسأله	سهیلا غلام‌آزاد
ــ پاپیروس رایند	مسعود مختاری
ــ قضایای نقطه ثابت	کورش توکلی

چند مسألهٔ المپیادی

اگر اهل مسأله حل کردن هستید، این گوی و این میدان که در التذاذ این کار شریک شوید! می‌توانید راه‌حل‌های خود را برایمان بفرستید. راه‌حل‌های برگزیده در شماره‌های آینده درج خواهند شد.

۱-۲ الف) یک جدول $n \times n$ را با اعداد ۱ تا n^2 پر کرده‌ایم. ثابت کنید دو خانهٔ مجاور وجود دارند که اختلاف اعداد داخلشان دست کم $n+1$ است(دو خانهٔ مجاور، دو خانه‌اند که دست کم در یک رأس مشترکند).

ب) یک جدول $n \times n$ را طوری با اعداد ۱ تا n^2 پر کنید که اختلاف اعداد هر دو خانهٔ مجاور، دست کم $n+1$ باشد.

۲-۲ دو ساعت عقربه‌ای کاملاً مشابه روی دیوار نصب شده‌اند و یکی ساعت توکیو و دیگری ساعت تهران را نشان می‌دهد. در طول یک ساعت، فاصلهٔ انتهای عقربه‌های دقیقه‌شمار دو ساعت، حداکثر M و حداقل m بوده‌است. فاصلهٔ مرکزهای دو ساعت از هم چقدر است؟

۳-۲ در یک دوره مسابقهٔ یک حذفی والیبال، n تیم شرکت کرده‌اند. هر روز، تیم‌هایی که تا آن روز حذف نشده‌اند دو به دو با هم بازی می‌کنند و در صورتی که تعدادشان فرد باشد، یکی از تیم‌ها آن روز را استراحت می‌کند. قهرمان با چند بازی مشخص می‌شود؟

۴-۲ یک مثلث متساوی‌الاضلاع را با پنج مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌اندازه کاملاً پوشانده‌ایم. ثابت کنید با چهار مثلث از همین مثلث‌ها هم می‌توان مثلث اولیه را پوشاند.

چهل و یکمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

July 13~25, 2000

چهل و یکمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، با حضور بیش از هشتاد و پنج کشور جهان از سیزدهم تا سی و یکم جولای ۲۰۰۰ در کرهٔ جنوبی برگزار می‌شود. برای این المپیاد که در سال جهانی ریاضیات برگزار می‌شود تدارک‌های ویژه‌ای دیده شده؛ از جمله آن که هم‌زمان با شروع آزمون‌های المپیاد ــ نوزده و بیست جولای، ۹ صبح به وقت کره ــ سؤال‌های آزمون به‌وسیلهٔ شبکهٔ اینترنت در سطح جهان پخش خواهند شد و هر علاقمندی در هر جای دنیا می‌تواند به نبردِ حل این مسأله‌ها بنشیند و تا پایان وقت، راه حل خود را از طریق شبکهٔ اینترنت برای کمیتهٔ برگزاری ارسال کند و از جوایز ویژه‌ای برخوردار شود.
نشانی مربوطه روی شبکهٔ اینترنت به این قرار است: www.imo2000.or.kr

مجله ریاضیات شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص ۴۶ـ۴۶

حل مسأله‌های المپیادی(شمارهٔ ۱)

مازیار میررحیمی

۱-۲ برای حل این مسأله کافی‌ست به‌صورت دیگری به مسأله نگاه کنید: هر خانهٔ مهره‌دار را در نظر بگیرید و در خانه‌های مجاور آن‌ها که مهره‌ای ندارند، یک علامت بگذارید؛ می‌خواهیم تعداد علامت‌ها ماکزیمم شود. اما این ماکزیمم به‌وضوح کمتر یا مساوی ۸×۱۰ است؛ چون هر خانه حداکثر ۸ خانهٔ مجاور دارد و کلاً ۱۰ مهره داریم. از طرفی این ماکزیمم نمی‌تواند ۸×۱۰ باشد؛ چون اگر ۱۰ مهره در صفحهٔ شطرنج ۸×۸ بگذاریم، دو حالت می‌تواند اتفاق بیفتد: یا حداقل یکی از مهره‌ها در خانه‌های کناری صفحه قرار دارد و یا دو مهره در کنار هم قرار می‌گیرند (دیدن این موضوع راحت است). در حالت اول یک خانهٔ مهره‌دار هست که حداکثر ۵ خانهٔ مجاور دارد و در حالت دوم تعداد علامت‌ها $۸ \times ۱۰ - ۲$ می‌شود(چون دو خانهٔ مهره‌دار کنار هم، علامت نمی‌خورند)؛ پس به‌طور کلی، تعداد علامت‌ها $۸۰ - ۲$ یعنی ۷۸ است و این هم در حالت آخر اتفاق می‌افتد.

۱-۳ مسأله را به مسأله‌ای در همنهشتی‌ها تبدیل کرده و حل می‌کنیم. مسألهٔ ما به‌این صورت است: تمام زوج‌های (x, y) را که $۱۰ \geq x, y \geq ۱$ در نظر بگیرید. در هر مرحله x را با ۷ و y را با ۳ جمع می‌کنیم و حاصل را به پیمانهٔ ۱۰ حساب می‌کنیم و به‌جای (x, y) قرار می‌دهیم. می‌خواهیم پس از ۱۳۷۹ نوبت به یک خانهٔ گوشه برسیم؛ یعنی

$$x + ۱۳۷۹ \times ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \text{ یا } ۱۰$$

$$y + ۱۳۷۹ \times ۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \text{ یا } ۱۰$$

پس

$$\left.\begin{array}{l} x + ۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \text{ یا } ۱۰ \\ y + ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \text{ یا } ۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \text{ یا } ۷ \\ y \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \text{ یا } ۳ \end{array}\right.$$

در نتیجه

$$(x, y) = (۸, ۴) \text{ یا } (۸, ۳) \text{ یا } (۷, ۴) \text{ یا } (۷, ۳)$$

۱-۴ مسأله را به‌صورت یک گراف در نظر بگیرید. برش‌های کیک را به‌صورت یال‌های گراف که بین ۳۰ رأس گراف رسم شده در نظر بگیرید؛ یعنی گراف مسطح داریم با ۳۰ رأس. تعداد ناحیه‌های داخلی برابر است با تعداد مهمان‌ها. حال فرض کنیم تعداد این ناحیه‌ها x باشد؛ پس تعداد یال‌ها برابر است با $\frac{۳x+۱۵}{۲}$. چون هر ناحیه ۳ یال دارد و هر یال غیراز یال‌های مرزی ۲ بار حساب می‌شود(یعنی مرز دو ناحیه است)، به‌طور کلی تعداد یال‌ها برابر است با $\frac{۳x+۱۵}{۲}$(چون تعداد یال‌های مرزی ۱۵ تا است). حال طبق قضیهٔ اویلر در گراف‌های مسطح، داریم $n + f = e + ۲$ که در آن n تعداد رأس‌ها، f تعداد ناحیه‌ها و e تعداد یال‌ها است؛ پس $f = x + ۱$، چون یک ناحیهٔ بیرونی هم باید محاسبه شود. در نتیجه $۳۰ + (x + ۱) = \frac{۳x+۱۵}{۲} + ۲$ که نتیجه می‌دهد $x = ۴۳$؛ پس تعداد مهمان‌ها ۴۳ نفر است.

مسأله‌های جایزه‌دار!

یحیی تابش

در شمارهٔ اول، یک مسألهٔ جایزه‌دار مطرح کردیم:

همهٔ نقاط صفحه را به‌طور دلخواه با چهار رنگ رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. ثابت کنید که دو نقطهٔ هم‌رنگ در صفحه هستند که فاصله‌شان یا برابر یک است و یا برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (نسبت طلایی).

عده‌ای از علاقمندان به حل مسأله، راه حلشان را برای ماهنامه فرستاده‌اند و حل‌های این دوستان برگزیده شده: مصطفی باقری(تهران)، معصومه پناهی(تهران)، یوسف جوانمردی(کرمانشاه)، وحید ریاضی(رشت) و سید رضا موحدی فردوس(مشهد). برای این نوجوانان علاقمند به ریاضیات و حل مسأله، یک جلد کتاب برای قدردانی ارسال خواهدشد.

خلاصه‌ای از حل مسأله به قرار زیر است:

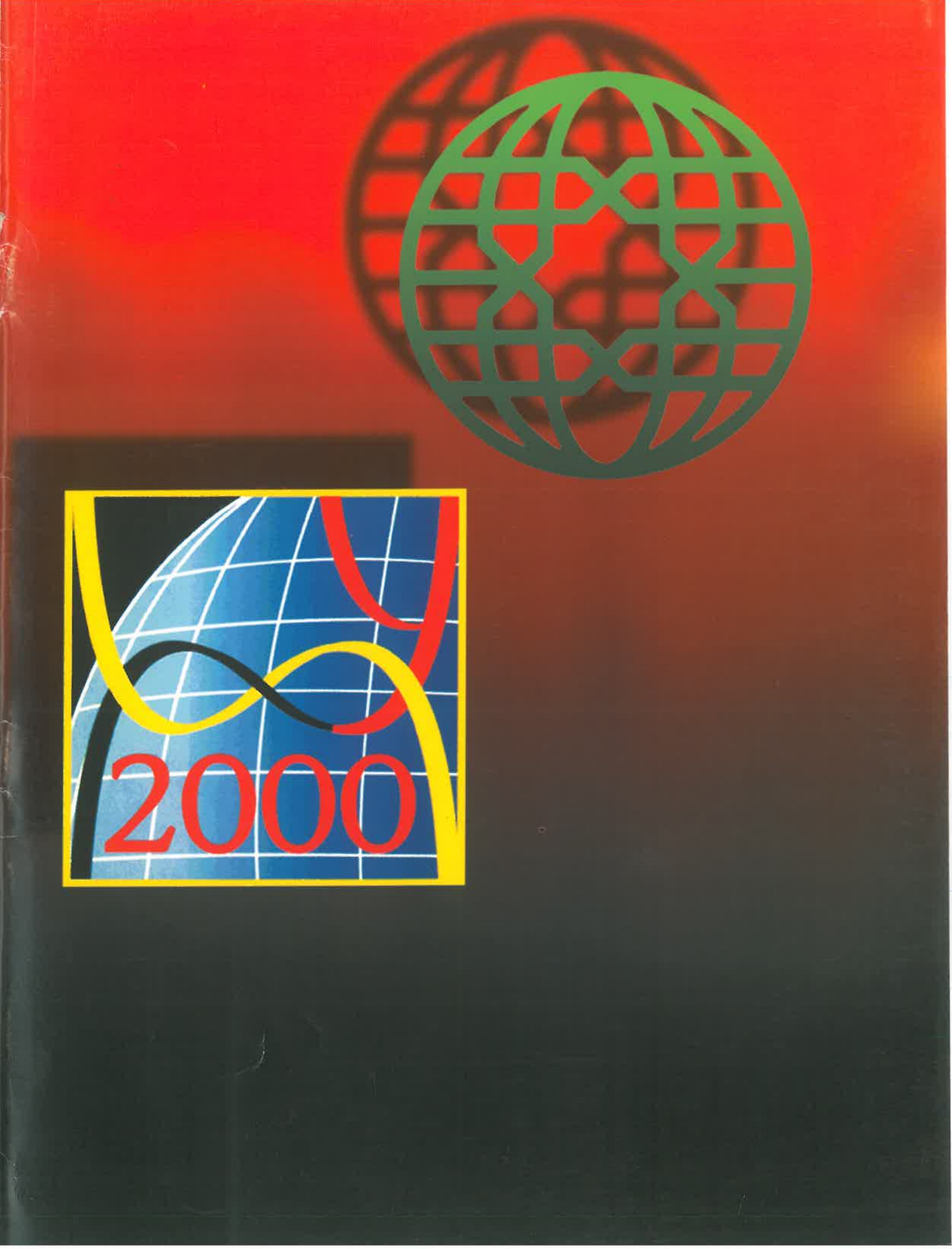
یک پنج‌ضلعی منتظم به ضلع واحد را در صفحه در نظر می‌گیریم؛ بنا بر اصل لانهٔ کبوتری، دست کم دو رأس از رأس‌های پنج‌ضلعی هم‌رنگند. اگر این دو رأس مجاور باشند، فاصله‌شان یک است و اگر نه، برابر طول قطر این پنج ضلعی منتظم، که با قدری محاسبه، نتیجه می‌شود برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

برای این شماره، دو مسألهٔ جایزه‌دار دیگر در نظر گرفته‌ایم و همهٔ دوستداران حل مسأله را به تلاش برای حل آنها فرا می‌خوانیم. راه‌حل‌های خود را برای ماهنامه بفرستید؛ کتاب به‌عنوان جایزه برای راه‌حل‌های برگزیده محفوظ است!

مسألهٔ ۲ـ۱. ده نقطه در صفحه مفروضند. از هر پنج نقطه از این ده نقطه، چهار نقطه روی یك دایره قرار دارند. بیشترین تعداد نقطه‌ها از بین ده نقطه را که روی یك دایره قرار دارند با ذکر دلیل تعیین کنید.

مسألهٔ ۲ـ۲. همهٔ نقاط صفحه را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید یا دو نقطهٔ قرمز وجود دارند که فاصله‌شان از هم یك واحد است و یا چهار نقطهٔ آبی روی یك خط راست موجودند که فاصلهٔ هر دوتای متوالی از آنها یك واحد است.

ریاضیات شمارهٔ ۲
(خرداد ۱۳۷۹) صص ۴۸ـ۴۸


2000