ماهنامه ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال اول، شمارهٔ اول، اردی‌بهشت ۱۳۷۹

۲۵۰ تومان

WMY 2000

سال ریاضیات ۱۳۷۹

سال ۲۰۰۰

سال جهانی ریاضیات

ریاضیات برای همه

ریاضیات زیر بنای توسعه

ریاضیات پایهٔ علوم

۲۸ اردیبهشت، روز ریاضیات گرامی باد

بسم الله الرحمن الرحیم

ماهنامه ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال اول، شمارهٔ اول، اردی‌بهشت ۱۳۷۹

نشانی دفتر ماهنامه

شمارهٔ ۱۵۹، خیابان استاد مطهری، تهران ۱۵۷۶۶

تلفن: ۸۷۵۲۰۳۴

پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

فهرست

روی جلد: «π گنگ است!»(نگاه کنید به مقالهٔ π، مساحت و محیط)

یادداشت‌ها

در نظام آموزشی مطلوب، علاوه بر برنامهٔ مصوب که حداقل آموزش فراگیر را مشخص می‌کند، آموزش‌های غیر رسمی نیز که تکمیل کنندهٔ آموزش رسمی است اهمیت ویژه‌ای دارد؛ زیرا از یک سو امکان تقویت پایهٔ علمی دانش آموزان را در هر گروهی که باشند فراهم می‌کند و از سوی دیگر امکان رشد و شکوفایی استعدادهای برجسته را فراهم می‌سازد. از جمله لوازم اساسی حرکت در این مسیر، نشر مجلات آموزشی ارزنده است و هدف هیأت تحریریهٔ ماهنامهٔ ریاضیات این است که این نشریه را در ردهٔ چنین مجلاتی قرار دهد؛ به امید آن که مخاطبان اصلی این ماهنامه که دانش آموزان هستند را در جهت شکفتن استعدادهای نهفته‌شان یاری دهد.

م. پ.

مجلات، از ابزارهای غیر قابل انکارِ رشد و توسعه تمدن بشر بوده‌اند و مجلات علمی از این حیث جایگاه ویژه‌ای دارند.

مخاطبین این مجله، نه متخصصین حرفه‌ای، بلکه علاقمندان جوان هستند. امیدواریم که این نشریه، در جهت آشنایی، آگاهی و علاقمندی هر چه بیشتر خوانندگانش مؤثر واقع شود و به ویژه، انگیزه‌ای برای انجام مطالعات علمی خارج از برنامهٔ درسی برای مخاطبین خود ایجاد کند.

ک. ت.

اواخر دبیرستان، وقتی کتاب‌های ریاضیِ «از ما بزرگتران» را می‌خواندم و ــ به زحمتی، البته ــ «انگیزه»های نوشته‌های کتاب‌های درسیم را پیدا می‌کردم، فکر می‌کردم که کاش این بزرگترها، کمی هم از جاشان پایین می‌آمدند و دستی به کاری برای «ما» می‌زدند. حالا، خودم جای آنها هستم که آن روزها فکر می‌کردم «می‌توانند» و، البته، نه به آن بزرگی ....

ب. ح.

چند ماه پیش، وقتی به من پیشنهاد شد که با این مجله همکاری کنم، یاد دوران دانش‌آموزیَم افتادم و این که آن موقع چقدر دلم می‌خواست بدانم که آیا مطالعهٔ ریاضی در سطح درک و فهم دانش‌آموز دبیرستانی، فقط محدود به مطالبی است که در کتاب‌های درسی مدرسه‌ای آمده یا نه، منابع خواندنی دیگری در زمینهٔ ریاضی در سطح ما وجود دارد و خلاصه، دلم می‌خواست کمی پایم را از گلیمی که برایمان پهن کرده بودند خارج کنم؛ مثلاً بدانم ریاضیدانان چگونه مطالعه و کار می‌کرده‌اند؟ چگونه هندسه، نظم فکری ایجاد می‌کند؟ اعداد π و e از کجا پیدا شده‌اند و چرا اصم هستند؟ چرا می‌گویند ریاضیات مادر علوم است؟ این همه رابطهٔ مثلثاتی که باید حفظ کنیم، چه فایده‌ای برای ما دارند؟ اهمیت مطالعهٔ ماتریس‌ها در چیست؟ و سؤال‌های بسیار دیگر.

بعدها، وقتی در دوران دانشجویی به امکانات کتابخانه‌ای دسترسی پیدا کردم، به این نتیجه رسیدم که نشریات تخصصی می‌توانند به نیازهای متنوع افراد علاقمند به قالب‌های غیرکلاسیک علوم پاسخ‌گو باشند. در واقع، یک نشریهٔ تخصصی می‌تواند با ارایهٔ مطالب متنوع و اطلاعات به روز، ایجاد انگیزه کرده و زمینهٔ مناسبی را برای رشد آموزشی مخاطبان ایجاد کند.

خلاصه، چنین ذهنیتی باعث شد که من پیشنهاد همکاری با مجله را با اشتیاق بپذیرم. البته شاید انگیزهٔ سایر اعضای تحریریه به مراتب از من بیشتر بود و همان به صورت نیروی محرکه‌ای درآمد که به فعالیت‌های آماده‌سازی مجله شتاب داد و کارها با حداقل امکانات و حداکثر علاقه انجام شد و حاصل آن مجله‌ای است که اکنون در دست دارید؛ تا که قبول افتد و چه در نظر آید.

س. غ.

پرتقال، علاوه بر این که پر خاصیت است، خوش مزه هم هست؛ به شرط آن که رسیده باشد و با پوست خورده نشود! آنهایی که فکر می‌کنند ریاضیات تلخ است، احتمالاً آن را با پوست خورده‌اند. ما می‌خواهیم چند پر از این پرتقال را به شما بدهیم تا شما نیز از آن لذت ببرید. به امید روزی که هر کدام از شما، یک درخت پرتقال بکارد.

ا. ن.

فراخوان

ماهنامهٔ ریاضیات که دانش آموزان دبیرستان و پیش دانشگاهی را به عنوان مخاطبان اصلی برگزیده است، دست همهٔ کسانی را که به این سبک و سیاق به یاریش برخیزند، می‌فشارد. برای ما مطلب، مسأله، طرح، کاریکاتور و ... بفرستید.
هر گونه اظهار نظر دربارهٔ محتوای ماهنامه خوشحالمان می‌کند. چشم به راه شما هستیم.

π، مساحت و محیط

امید نقشینه ارجمند

π چیست؟

π چیست؟ بعضی‌ها در جواب این سؤال می‌گویند «π تقریباً ۳٫۱۴ است»؛ ولی این جواب چندان مناسبی نیست. اگر از شما بپرسند «$\sqrt{2}$ چیست» چه جوابی می‌دهید؟ بهترین جواب، این است که «$\sqrt{2}$، یگانه عدد حقیقی مثبتی است که توان دوم آن ۲ است».

π را دو جا دیده‌اید؛ در فرمول‌های محیط و مساحت دایره:

$$\text{محیط دایره‌ای به شعاع } r = 2\pi r$$

$$\text{مساحت دایره‌ای به شعاع } r = \pi r^2$$

با توجه به این فرمول‌ها ــ که هنوز آنها را ثابت نکرده‌ایم ــ می‌توان جواب‌های بهتری به سؤال «π چیست» داد:

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره‌ای به شعاع } r}{2r}$$

$$\pi = \frac{\text{مساحت دایره‌ای به شعاع } r}{r^2}.$$

آیا داستان با این جواب‌ها تمام می‌شود؟ به نظر من، نه! اگر r را تغییر دهیم، مقدار کسرهای بالا تغییر نخواهد کرد؟ آیا دو کسر باهم برابرند؟ فعلاً جواب این سؤال‌ها را نمی‌دانیم؛ پس بهتر است π را طوری تعریف کنیم که ابهامی در آن نباشد.

تعریف ۱. *π مساحت دایره‌ای به شعاع یک است.*

پس از بیان این تعریف، باید چند کار انجام دهیم: اثبات فرمول مساحت و محیط دایره. کار دیگرمان، پیدا کردن تقریبی از π است: فکر نمی‌کنم این که مساحت دایرهٔ واحد تقریباً ۳٫۱۴ است واضح باشد.

قبل از این که بتوانیم مسایل بالا را حل کنیم، موضوعی وجود دارد که باید دقیق‌تر بررسی شود.

مساحت[*]

فرض کنید A شکلی دو بعدی باشد؛ به بیان دیگر، زیرمجموعه‌ای از صفحه. منظور از مساحت A چیست؟ البته، شما قطعاً تصوری از مساحت دارید؛ ولی برای اثبات قضیه‌ای ریاضی، به چیزی بیش از «تصور» نیازمندیم.

از این به بعد، مساحت A را،در صورت وجود، با $S(A)$ نشان می‌دهیم(فعلاً در مورد عبارت «در صورت وجود» زیاد کنجکاوی به خرج ندهید. می‌توانید آن را ندیده بگیرید).

از تابع S چه توقع‌هایی داریم؟

[*] ریاضیات شمارهٔ ۱ (اردیبهشت ۱۳۷۹) صص ۱۱ـ۲

۱) برای هر A، $S(A) \geq 0$؛

۲) اگر $A \cap B = \varnothing$ آنگاه $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$؛

۳) اگر A مستطیلی با اضلاع a و b باشد آنگاه $S(A) = ab$.

فعلاً همین‌ها کافی است. به‌جای (۲) می‌توان گزارهٔ قوی‌تری نوشت که کار کردن با آن راحت‌تر است:

۲′) اگر A_1، ...، A_n دو به دو جدا از هم باشند آنگاه $S(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = S(A_1) + \cdots + S(A_n)$.

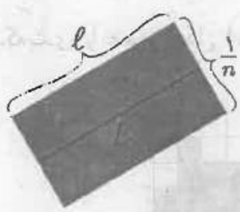
به کمک استقرای ریاضی، به‌سادگی ثابت می‌شود که (۲′) از (۲) نتیجه می‌شود.

قضیه ۱. *اگر $A \subseteq B$ آنگاه* $S(A) \leq S(B)$.

برهان. واضح است که $B = A \cup (B - A)$ و $A \cap (B - A) = \varnothing$؛ پس طبق (۲)، $S(B) = S(A) + S(B - A)$. طبق (۱) می‌دانیم که $S(B - A) \geq 0$؛ پس $S(A) \leq S(B)$. ■

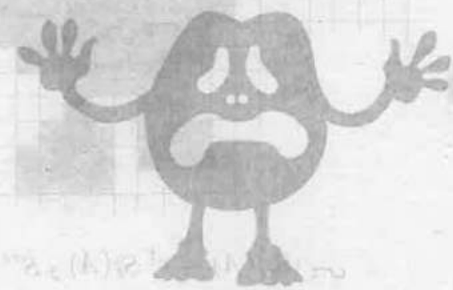
برای ادامهٔ کار، به یک قضیهٔ سادهٔ دیگر هم احتیاج داریم.

قضیه ۲. *اگر L یک پاره‌خط باشد آنگاه* $S(L) = 0$.

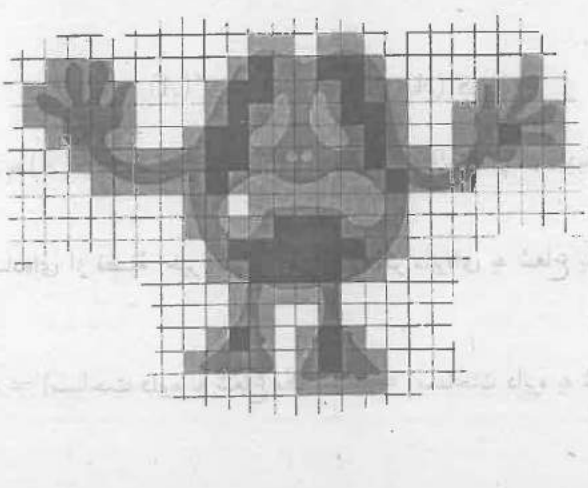


برهان. فرض کنید طول L برابر ℓ باشد. واضح است که برای هر $n > 0$ می‌توان این پاره‌خط را داخل مستطیلی به اضلاع ℓ و $\frac{1}{n}$ قرار داد. مساحت این مستطیل $\frac{\ell}{n}$ است؛ پس $0 \leq S(L) \leq \frac{\ell}{n}$. با بزرگ کردن n، $\frac{\ell}{n}$ کوچک و کوچک‌تر می‌شود و به صفر میل می‌کند؛ پس $S(L)$ عددی نامنفی است که از هر عدد مثبت کوچک‌تر است و در نتیجه، $S(L) = 0$.

حال می‌توانیم دربارهٔ مساحت شکل‌هایی غیر از مستطیل و پاره‌خط هم صحبت کنیم: فرض کنید A شکلی در صفحه باشد.



برای محاسبهٔ $S(A)$، صفحه را با مربع‌هایی به ضلع ε شبکه‌بندی می‌کنیم؛ در این صورت، مربع‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند: آنهایی که کاملاً داخل A هستند، آنهایی که کاملاً خارج A(داخل A^c) هستند و آنهایی که هم A و هم A^c را قطع می‌کنند.



فرض‌کنید N تعداد مربع‌های دستهٔ اول و M تعداد مربع‌های دستهٔ اول و سوم باشد؛ پس $N \le M$. مساحت هریک از مربع‌ها $\varepsilon^{۲}$ است و در ضمن، هر دو مربع حداکثر در یک پاره‌خط با هم اشتراک دارند. اکنون دو شکل داریم که یکی شامل A است و دیگری زیرمجموعهٔ A. مساحت ناحیهٔ بزرگ‌تر $M\varepsilon^{۲}$ است و مساحت ناحیهٔ کوچک‌تر $N\varepsilon^{۲}$؛ پس

$$N\varepsilon^{۲} \le S(A) \le N\varepsilon^{۲}.$$

عبارت طرف راست را با $S^{\varepsilon}(A)$ و عبارت طرف چپ را با $S_{\varepsilon}(A)$ نشان می‌دهیم. با کوچک کردن ε، $S^{\varepsilon}(A)$ کوچک و کوچک‌تر می‌شود و $S_{\varepsilon}(A)$ بزرگ و بزرگ‌تر و اگر A شکلی «خوب» باشد، این دو به هر اندازهٔ دلخواه به $S(A)$ نزدیک می‌شوند.

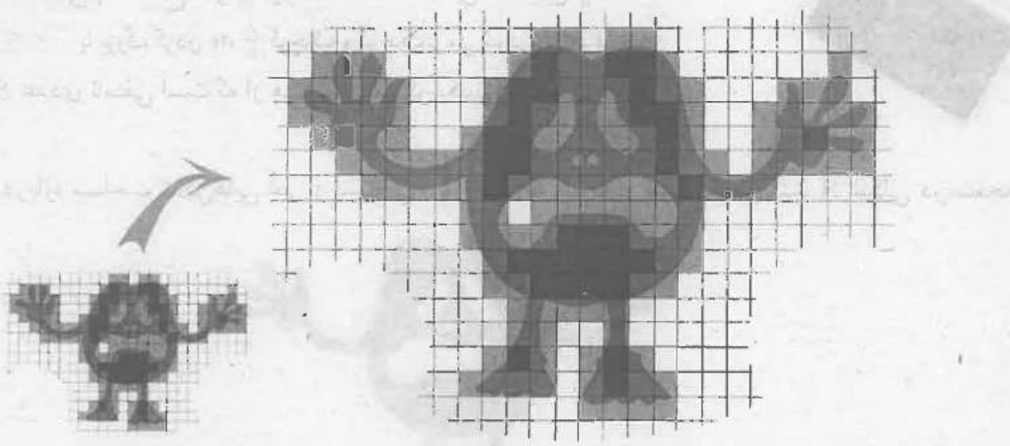
برای محاسبهٔ مساحت دایره، به قضیهٔ زیر احتیاج داریم:

قضیه ۳. *فرض‌کنید $S = S(A)$. اگر B شکلی باشد که از r برابرکردن A به‌وجود آمده است آنگاه $S(B) = r^{۲}S$.*

برهان. واضح است که اگر A مربع باشد حکم برقرار است. در حالت کلی، فرض کنید با مربع‌هایی به ضلع ε مساحت A را از بالا و پایین تقریب زده‌ایم؛ پس

$$S_{\varepsilon}(A) \le S(A) \le S^{\varepsilon}(A).$$

اگر شبکه‌بندی را همراه شکل A، r برابر کنیم، به شبکه‌بندی‌ای برای B با مربع‌هایی به ضلع $r\varepsilon$ می‌رسیم.



ولی می‌دانیم که $S^{r\varepsilon}(A) = r^{۲}\, S^{\varepsilon}(A)$ و $S_{r\varepsilon}(A) = r^{۲}\, S_{\varepsilon}(A)$؛ پس

$$r^{۲}\, S_{\varepsilon}(A) \le S(B) \le r^{۲}\, S^{\varepsilon}(A)$$

یا به عبارتی

$$S_{\varepsilon}(A) \le \frac{۱}{r^{۲}}\, S(B) \le S^{\varepsilon}(A).$$

باکوچک کردن ε، $S^{\varepsilon}(A)$ و $S_{\varepsilon}(A)$ به $S(A)$ نزدیک می‌شوند. این دو مقدار، به $\frac{۱}{r^{۲}}\, S(B)$ هم نزدیک می‌شوند؛ پس $S(A) = \frac{۱}{r^{۲}}\, S(B)$ و در نتیجه $S(B) = r^{۲}\, S(A)$. ■

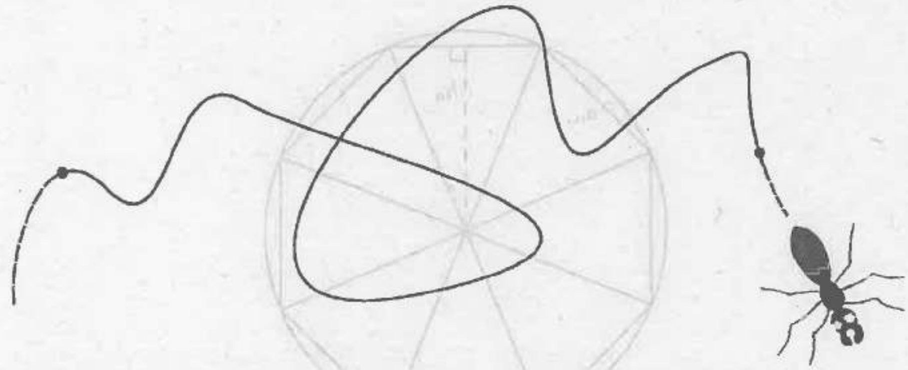
فرمول مساحت دایره، نتیجهٔ ساده‌ای از قضیهٔ اخیر است: در واقع، اگر دایره‌ای به شعاع یک را r برابر کنیم، دایره‌ای به شعاع r به‌وجود می‌آید و طبق قضیه داریم

$$(\text{مساحت دایره به شعاع } r) = r^{۲} \times (\text{مساحت دایره به شعاع یک}) = \pi r^{۲}.$$

محیط دایره

در این قسمت، می‌خواهیم تعریف نسبتاً دقیقی از طول یک خم ارایه دهیم. منظور از یک «خم»، تابعی پیوسته از بازهٔ بسته‌ای مثل $[a, b]$ به $\mathbb{R}^2$ است. خیلی سخت شد؟!

فرض‌کنید مورچه‌ای روی صفحه در حال حرکت است. از لحظهٔ a تا لحظهٔ b حرکت مورچه را دنبال می‌کنیم. در لحظهٔ t، مورچه در نقطه‌ای در صفحه قرار دارد؛ آن را $X(t)$ می‌نامیم. حرکت مورچه، «پیوسته» است؛ حتماً تصوری از کلمهٔ «پیوسته» در این عبارت دارید.



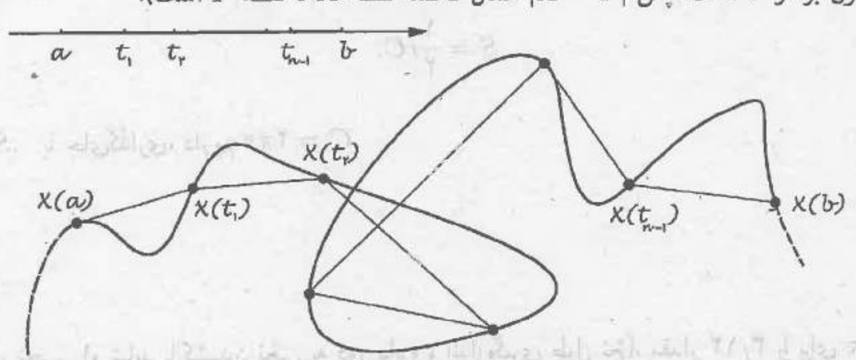
حال واضح است که حرکت مورچه از لحظهٔ a تا لحظهٔ b با تابع $X : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ مشخص می‌شود و این تابع، پیوسته است. می‌خواهیم ببینیم مورچه چه طولی را پیموده است؛ یا، به عبارت دیگر، طول X از a تا b چه‌قدر است. باز هم تقریب می‌زنیم: بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ را به n قسمت تقسیم می‌کنیم؛ به این صورت که دنباله‌ای صعودی مثل $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ را طوری در نظر می‌گیریم که

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

با تصوری که از طول داریم، واضح‌است که آنچه می‌خواهیم به‌عنوان طول X از a تا b تعریف کنیم بزرگ‌تر یا مساوی مقدار

$$|X(t_1) - X(t_0)| + \cdots + |X(t_n) - X(t_{n-1})|$$

است(منظور از $|V|$ طول بردار V است؛ پس $|X - Y|$ همان فاصلهٔ نقطهٔ X تا نقطهٔ Y است).



با زیاد کردن n و کم کردن فاصلهٔ t_i های متوالی، مقدار بالا بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود و به عددی نزدیک می‌شود که آن را طول X می‌گوییم و با $\ell(X)$ نشان می‌دهیم(بعداً خواهید دید که برای بعضی خم‌ها، این تقریب‌ها از هر عددی بزرگ‌تر می‌شوند. در این صورت، می‌گوییم طول خم بینهایت است).

بد نیست قضیه‌ای مشابه آنچه دربارهٔ مساحت گفتیم بیان کنیم. اثباتش به عهدهٔ شما.

قضیه ۴ . *فرض‌کنید $X : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ خمی پیوسته با طول متناهی باشد و r عددی مثبت. اگر $Y : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ خم دیگری باشد که از r برابر کردن X به‌دست آمده آنگاه*

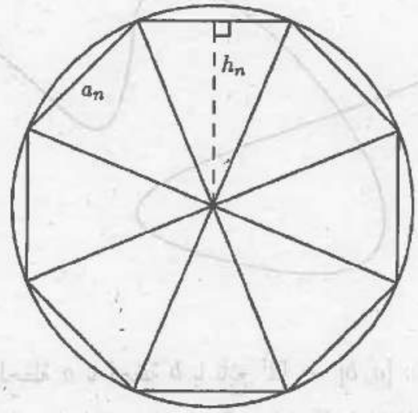
$$\ell(Y) = r\ell(X).$$

نتیجه ۱. *اگر محیط دایره به شعاع یک، $۲\pi'$ باشد آنگاه محیط دایره به شعاع r، $۲\pi' r$ است.*

حال به محاسبهٔ فرمول محیط دایره می‌پردازیم(البته برای این کار، احتیاجی به استفاده از نتیجهٔ اخیر نداریم).

قضیه ۵. *محیط دایره به شعاع r برابر است با $۲\pi r$.*

برهان. محیط دایره را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم؛ یک n ضلعی منتظم به‌وجود می‌آید. با وصل کردن رأس‌های n ضلعی به مرکز دایره، n مثلث مساوی خواهیم داشت.



روابط زیر، به‌سادگی به‌دست می‌آیند:

$$S_n = n\left(\frac{۱}{۲}h_n a_n\right) = \frac{۱}{۲}h_n p_n;$$

پس $S_n = \frac{۱}{۲}h_n p_n$.

اکنون با بزرگ کردن n، h_n به r(شعاع دایره)، p_n به C(محیط دایره) و S_n به S(مساحت دایره) میل می‌کند و در نتیجه

$$S = \frac{۱}{۲}rC.$$

می‌دانیم که $S = \pi r^۲$. با جای‌گذاری، داریم $C = ۲\pi r$. ■

محاسبهٔ تجربی

رومی‌های قدیم، به‌طور تجربی(و شاید با کشیدن نخی به دور دایره و اندازه‌گیری طول نخ)، مقدار ۳/۱۲ را برای π به‌دست آوردند. البته در چنین تجربه‌ای خطاهای زیادی وجود دارد. من به کمک یک قوطی فلزی این تجربه را انجام دادم. اندازه‌گیری محیط با یک تکه نخ کار ساده‌ای است. طبق اندازه‌گیری من، محیط قوطی ۳۹/۵ سانتی‌متر بود. برای اندازه گرفتن قطر، از این واقعیت استفاده کردم که زاویهٔ قائمهٔ محاطی، رو به رو به قطر است و قطر قوطی تقریباً ۱۲/۵ سانتی‌متر شد. پس از تقسیم این دو به هم،

$$\pi \approx \frac{۳۹/۵}{۱۲/۵} = ۳/۱۶$$

به‌دست آمد. شما هم همین کار را انجام دهید. دایره‌های بزرگ‌تر، نتیجهٔ بهتری می‌دهند.

تقریبی دقیق!

به کمک تجربه، π را به‌طور تقریبی به‌دست آوردیم؛ ولی واقعاً این عبارت که $\pi \approx ۳/۱۶$(یا $\pi \approx ۳/۱۴$) چه معنی‌ای می‌دهد؟ π چه‌قدر به این اعداد نزدیک است؟ جواب این سؤال‌ها را نمی‌توان با تجربه به‌دست آورد.

می‌توان نشان داد که اگر P_k محیط k ضلعی محیط بر دایره باشد و p_k محیط k ضلعی محاط در دایره آنگاه

$$p_k < C < P_k.$$

ارشمیدس، بر اساس همین نابرابری با فرض $k = ۹۶$، نتیجه گرفت

$$۳\frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳\frac{۱}{۷};$$

و این یعنی یک تقریب دقیق! فکر می‌کنم ارشمیدس برای انجام چنین محاسبه‌ای زحمت زیادی کشیده است. شما هم به‌ازای $k = ۳, ۴, ۶$، π را تقریب بزنید.

راستی ارشمیدس چرا k را برابر ۹۶ گرفت؟ عددی مثل ۱۰۰ سرراست‌تر نیست؟ اگر کمی فکر کنید متوجه خاصیت ۹۶ می‌شوید.

در نقاط دیگر دنیا هم محاسباتی انجام شده‌است. ۱۴۰۰ سال پیش از میلاد، در پاپیروس ریند مقدار[۲] $(\frac{۱۶}{۹})$ برای π ثبت شده است. در هند باستان، براهماگوپتا(متولد ۸۰۰ قبل از میلاد) π را برابر $\sqrt{۱۰}$ محاسبه کرد و پس از او، هندآریاباتا مقدار ۳٫۱۴۱۶ را به‌دست آورد. در سال ۲۶۳ میلادی، لیو هوی در چین به کمک ۱۹۲ ضلعی محیطی، مقدار ۳٫۱۴۱۰۲۴ و سپس با استفاده از ۳۰۷۲ ضلعی مقدار ۳٫۱۴۱۶ را محاسبه کرد. پس از او، تسو چونگ چی(۴۲۹ ــ ۵۰۰ میلادی) با محیط کردن و محاط کردن چند ضلعی، نابرابری

$$۳/۱۴۱۵۹۲۶ < \pi < ۳/۱۴۱۵۹۲۷$$

و تقریب گویای $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ را به‌دست آورد.

این تقریب تا قرن چهاردهم میلادی پیشرفتی نکرد تا آن‌که غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضیدان ایرانی، در کتابی به نام رسالهٔ محیطیه با استفاده از ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ ضلعی منتظم مقدار π را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد(فکر می‌کنم آن‌روزها هنوز کامپیوترهای سریع به بازار نیامده بودند!). این رکورد شکنی، تا دوبست سال بی‌رقیب بود.

در ۱۶۱۰ میلادی لودلف وان تسلن، ریاضیدان هلندی، k را برابر ۶×۱۰^{۳۰} گرفت و تا ۲۰ رقم اعشار π را حساب کرد. در سدهٔ هفدهم، دو ریاضیدان و فیزیکدان هلندی، ویلبر وردسنه لیوس(۱۵۸۰ ــ ۱۶۲۶ میلادی) و کریستیان هُوی‌خنس(۱۶۲۹ ــ ۱۶۹۵ میلادی) روش‌های جدیدی به کار بردند. در سال ۱۶۵۴، هوی‌خنس بیست و پنج ساله رسالهٔ دربارهٔ تعیین مقدار محیط دایره را چاپ کرد و در آن ثابت کرد که

$$\frac{۴}{۳}p_{۲n} - \frac{۱}{۳}p_n \leq C < \frac{۲}{۳}p_{۲n} + \frac{۱}{۳}P_{۲n}.$$

هوی‌خنس در رساله‌اش توضیح می‌دهد که اگر بخواهیم به همان تقریب ارشمیدس که به کمک ۹۶ ضلعی به‌دست آورده بود($k = ۹۶$)، کافی‌ست با استفاده از نابرابری اخیر به ۱۲ ضلعی منتظم($۲n = ۱۲$) متوسل شویم. نابرابری جالبی است؛ نه؟ اثباتی از آن را می‌توانید در [۴] ببینید.

نیکی شنکس در ۱۸۷۳ با محاسبهٔ ۷۰۷ رقم رکورد را بالاتر برد. فرگوسن در ۱۹۴۷ این دقت را به ۸۰۸ رقم رساند و در ضمن، نشان داد محاسبهٔ شنکس در رقم ۵۲۹ ام اشتباه بوده!

امروزه، با کمک کامپیوتر، π را تا میلیون‌ها رقم اعشار محاسبه می‌کنند. نتایج این محاسبات، چه از دید عملی و چه از دید نظری، هیچ فایده‌ای ندارند؛ البته روش‌هایی که برای این محاسبات استفاده می‌شوند اهمیت دارند.

محاسبهٔ دقیق π!

لئونارد اویلر در قرن هجدهم روابط زیر را برای محاسبهٔ π به‌دست آورد:

$$\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\cdots;$$

$$\frac{\pi^۲}{۶}=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots;$$

$$\frac{\pi}{۴}=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱^۲}{۲+\cfrac{۳^۲}{۲+\cfrac{۵^۲}{۲+\cfrac{۷^۲}{۲+\cdots}}}}}.$$

ریاضیدان انگلیسی جان والیس[۱](۱۶۱۶ ــ ۱۷۰۳ میلادی) رابطهٔ ضربی

$$\frac{\pi}{۲}=\frac{۲}{۱}\cdot\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۴}{۳}\cdot\frac{۴}{۵}\cdot\frac{۶}{۵}\cdot\frac{۶}{۷}\cdots.$$

را ثابت کرد.

کمی بیشتر دربارهٔ π

برای اولین بار، لامبر[۲](۱۷۲۸ ــ ۱۷۷۷ میلادی) ثابت کرد که π گنگ است. در سال ۱۸۸۲ لیندِمان[۳]، ریاضیدان آلمانی، ثابت کرد که π ریشهٔ هیچ چندجمله‌ای با ضرایب گویا نیست[۴]. او در کارش از ایده‌های شارل هرمیت[۵] فرانسوی(۱۸۲۲ ــ ۱۹۰۵ میلادی) استفاده کرد. اگر دوست دارید در این مورد بیشتر بدانید، به [۲]، [۳] و [۴] مراجعه کنید.

«در صورت وجود»

این عبارت را به یاد دارید؟ کمی به عقب برگردیم. برای محاسبهٔ مساحت شکل A، به‌ازای $\varepsilon > ۰$، $S(A)$ را با $S^\varepsilon(A)$ و $S_\varepsilon(A)$ از بالا و پایین تقریب زدیم و سپس، با کوچک کردن ε، انتظار داشتیم که این دو مقدار به هم ــ و در نتیجه به $S(A)$ ــ میل کنند. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که گاهی این انتظار برآورده نمی‌شود: فرض کنید A مجموعهٔ نقاطی از مربع واحد باشد که مختصاتشان گویاست؛ به عبارت دیگر

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲\mid ۰\le |x|,|y|\le ۱,\ x,y\in\mathbb{Q}\}.$$

کشیدن شکل A مقدور نیست! حال به سادگی می‌توان نشان داد که برای هر $۱ > \varepsilon > ۰$ داریم $S_\varepsilon(A)=۰$ و $S^\varepsilon(A)=۱$ و با کوچک کردن ε این دو عدد به هم نزدیک نمی‌شوند؛ پس از این راه نمی‌توان برای A مساحتی تعریف کرد. البته نباید نگران بود: برای شکل‌هایی مثل دایره یا چندضلعی این مشکل پیش نمی‌آید.

۱) John Wallis

۲) Lambert

۳) Lindemann

۴) به چنین عددی غیرجبری یا متعالی گفته می‌شود.

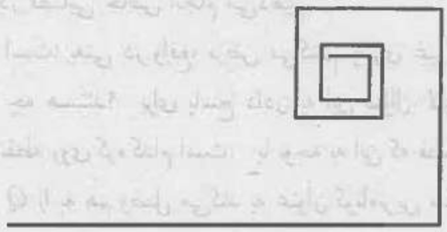
۵) Charles Hermite

سفری طولانی در زمانی کوتاه

به عنوان آخرین مطلب، می‌خواهیم خمی معرفی کنیم که طول آن بینهایت است. سری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
& ۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۹}+\cdots \\
\geq\ & ۱+\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}\right)+\left(\frac{۱}{۱۶}+\cdots+\frac{۱}{۱۶}\right)+\cdots \\
=\ & ۱+\tfrac{۱}{۲}+\tfrac{۱}{۲}+\tfrac{۱}{۲}+\tfrac{۱}{۲}+\cdots \\
=\ & \infty.
\end{aligned}$$

حال، با کمک گرفتن از شکل زیر، خمی بسازید که طول آن بینهایت باشد:



مراجع

[۱] سرژ لانگ، بحث ریاضی با دانش‌آموز، ترجمهٔ نعمت عبادیان. انتشارات مدرسه.

[۲] هربرت رابینز و ریچارد کورانت، ریاضیات چیست؟، ترجمهٔ حسن صفاری. انتشارات خوارزمی.

[۳] چارلز رابرت هدلاک، نظریهٔ میدان و مسایل کلاسیک آن، ترجمهٔ رضا جهانی‌نژاد. انتشارات علمی و فرهنگی.

[۴] گرشن ایخلدویچ درینفلد، تربیع دایره و غیرجبری بودن π، ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات رز نشر.

[۵] احمد فرید، غیاث‌الدین جمشید کاشانی. مجلهٔ دانشمند، سال سی و دوم، ۳۷۱، صفحهٔ ۷۰.

هندسهٔ کره

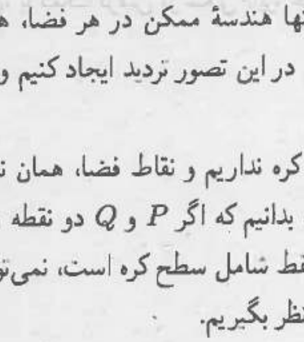
کورش توکلی

تأکید فراوان دوره‌های راهنمایی و دبیرستان بر هندسهٔ اقلیدسی باعث این تصور می‌شود که تنها هندسهٔ ممکن در هر فضا، همان هندسهٔ اقلیدسی است و اصول و قضایای آن در هر شرایطی برقرارند. در این مقاله، سعی می‌کنیم در این تصور تردید ایجاد کنیم و این کار را با بررسی برخی واقعیت‌های هندسی در فضایی خاص انجام می‌دهیم.

فضایی که در نظر می‌گیریم، سطح کره است؛ یعنی در واقع، فرض می‌کنیم چیزی غیر از رویهٔ کره نداریم و نقاط فضا، همان نقاط روی سطح کره هستند. خط‌های این فضا چه هستند؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، لازم است بدانیم که اگر P و Q دو نقطه روی سطح کره باشند، کوتاه‌ترین مسیر بین این دو نقطه روی کره کدام است. با توجه به این که فضایمان فقط شامل سطح کره است، نمی‌توانیم پاره‌خطی را که از داخل کره می‌گذرد و P و Q را به هم وصل می‌کند به عنوان کوتاه‌ترین مسیر در نظر بگیریم.

شکل ۱

می‌دانید که دایره‌های عظیمهٔ کره، دایره‌هایی هستند که روی سطح کره قرار دارند و شعاعشان برابر شعاع کره است. دایرهٔ عظیمه‌ای که P و Q روی آن هستند را در نظر بگیرید؛ این دایره توسط P و Q به دو قسمت تقسیم می‌شود. قطعهٔ کوتاه‌تر، کوتاه‌ترین مسیر بین این دو نقطه است(به شکل ۱ نگاه کنید). این مطلب باید ثابت شود. برای جلوگیری از طولانی شدن مقاله، از برهان صرف‌نظر می‌کنیم؛ اما خودتان به اثبات آن فکر کنید.



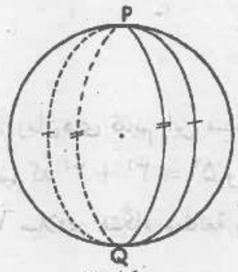
شکل ۲

بنابراین، دایره‌های عظیمهٔ کره نقش خط‌های صفحه را روی کره دارند. به همین ترتیب، می‌توانیم مفهوم زاویهٔ روی کره را تعریف کنیم. فرض‌کنید که مطابق شکل ۲، سه نقطهٔ M و N و P روی کره باشند؛ می‌خواهیم زاویهٔ MNP را تعریف کنیم. دو دایرهٔ عظیمه‌ای را که یکی از آنها از N و M و دیگری از N و P می‌گذرند در نظر بگیرید. دایرهٔ عظیمه‌ای که از M و N می‌گذرد، در صفحه‌ای واقع است؛ خط مماس بر دایره در نقطهٔ N ــ که در این صفحه واقع است ــ را d_1 و خط مماس بر دایرهٔ عظیمهٔ دیگر را در N، d_2 می‌نامیم(خط مماس دوم، در صفحه‌ای که دایرهٔ عظیمهٔ گذرا از N و P مشخص می‌کند واقع است). زاویهٔ MNP را زاویهٔ بین این دو خط تعریف می‌کنیم.

حال، با توجه به تعریف‌های بالا، به بررسی تفاوت‌های هندسهٔ روی کره با هندسهٔ اقلیدسی در صفحه می‌پردازیم.

ریاضیات شمارهٔ ۱
(اردی‌بهشت ۱۳۷۹) صص ۱۳ــ۱۲

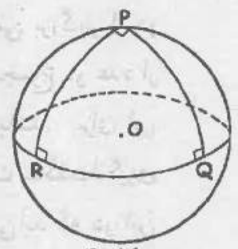
• اگر در صفحه دو نقطهٔ متمایز در نظر بگیریم، دقیقاً یک خط وجود دارد که از آن دو نقطه می‌گذرد؛ در صورتی‌که اگر در کره دو نقطه را طوری انتخاب کنیم که دو سر یک قطر باشند، از آن دو نقطه بی‌نهایت دایرهٔ عظیمه ــ که در واقع «خط»های فضای ما هستند ــ می‌گذرند(به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

• در صفحه، بعضی خط‌ها موازی هم هستند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ در صورتی‌که روی کره، هر دو دایرهٔ عظیمه یکدیگر را قطع می‌کنند و در نتیجه، روی کره «خط‌های موازی» نداریم.

• اگر از نقطه‌ای از یک خط در صفحه، در امتداد خط و در یک جهت شروع به حرکت کنیم، هیچ‌گاه به مبدأ حرکت نمی‌رسیم؛ اما در کره با حرکت روی خطوط آن(یعنی دایره‌های عظیمه) به مبدأ حرکت باز می‌گردیم. در واقع، طول خط روی صفحه متناهی نیست؛ اما روی کره، طول خط متناهی است.



شکل ۴

• تفاوت جالب دیگر، این است که در هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی، مجموع زوایای داخلی همهٔ مثلث‌ها ثابت است و برابر π؛ اما روی کره، مجموع زوایای داخلی مثلث بیشتر از π است. این مقدار، ثابت هم نیست؛ مثلاً مجموع زوایای داخلی مثلث شکل ۴ برابر $\frac{۳\pi}{۲}$ است و خودتان هم می‌توانید مثلث‌های دیگری با مجموع زوایای داخلی متفاوت پیدا کنید.

راستی، به نظر شما، روی کرهٔ زمین چه نوع هندسه‌ای برقرار است؟

آخرین قضیهٔ فرما

یحیی تابش

از زمان‌های قدیم، این مسأله که مربعی پیدا کنیم که برابر مجموع دو مربع دیگر باشد به کمک قضیهٔ فیثاغورس شناخته شده بود؛ مثلاً می‌دانیم که ۴ $۴^۲ + ۳^۲ = ۵^۲$ و یا $۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲$. پیر فرما، ریاضیدان فرانسوی که در قرن هفدهم می‌زیست، روزی در حدود سال ۱۶۳۷ میلادی هنگام مطالعهٔ یک کتاب نظریهٔ اعداد، در حاشیهٔ کتاب کنار مسأله‌ای دربارهٔ مربعی که برابر مجموع دو مربع باشد نوشت:

فرما: اثبات شگفت‌انگیزی به نظرم می‌آید که در این حاشیه نمی‌گنجد

از طرف دیگر، برای یک مکعب غیر ممکن است که مجموع دو مکعب باشد، توان چهارم برابر مجموع دو توان چهارم، و به طور کلی برای هر عدد که توانی بزرگ‌تر از دو است برابر مجموع دو عدد از همان توان باشد. برای این مطلب اثبات شگفت‌انگیزی به نظرم می‌آید که در این حاشیه نمی‌گنجد.

به عبارت دیگر، فرما می‌گوید به‌ازای $n > ۲$، تنها جواب‌های صحیح $x^n + y^n = z^n$ جواب‌های بدیهی‌اند؛ یعنی جواب‌هایی که در آنها دست کم یکی از x، y و یا z صفر است. فرما قبلاً برهان حالت‌های خاص $n = ۳$ و $n = ۴$ را منتشر کرده‌بود، ولی امروزه هیچ‌کس باور ندارد که او برهان درستی از قضیه را در حالت کلی به‌دست آورده باشد.

این مسأله که به آخرین قضیهٔ فرما مشهور است، سال‌ها مسألهٔ مبارزطلبی بود و ریاضیدانان را به نبرد می‌طلبید. چون درک صورت این قضیه نسبتاً ساده است، ریاضیدانان غیرحرفه‌ای هم به تلاش برای اثبات آن علاقمند شده بودند؛ هرچند که پس از مدتی معلوم شد راه‌حل‌های مقدماتی به اثبات حکم منجر نمی‌شوند و مسأله پیچیده‌تر از آن است که راه‌حل ساده‌ای با ابزارهای مقدماتی داشته‌باشد.

تا همین اواخر، مانع عمدهٔ اثبات قضیه این بود که حکم فرما موضوعی تک افتاده و منزوی بود و هیچ‌کس نمی‌دانست از چه مسیری می‌توان به آن دست یافت. یک قرن پس از درگذشت فرما، هنگامی که از گاوس پرسیدند چرا هیچ وقت سعی نکرده این قضیه را ثابت کند، جواب داد که «من می‌توانم صد تا از این گزاره‌ها بنویسم که هیچ کس نتواند آنها را ثابت یا رد کند و فقط به این درد بخورند که ریاضیات را کند کنند». امروزه معلوم شده که این قضاوت گاوس دقیق نبوده‌است؛ چه تلاش در راه اثبات قضیهٔ فرما موجب شکوفایی و باروری شاخه‌های گوناگونی در ریاضیات شد.

تلاش‌های ریاضیدانان برای اثبات این قضیه بیش از سیصد سال به طول انجامید و در حالی که این مسأله به یکی از هیجان‌انگیزترین

ریاضیات شمارهٔ ۱
(اردیبهشت ۱۳۷۹) صص ۱۸–۱۴

مسأله‌های ریاضی تبدیل شده‌بود، در یکی از روزهای اوایل تابستان ۱۹۹۳ میلادی اندرو وایلز، ریاضیدانی با اصلیت انگلیسی که استاد دانشگاه پرینستن در ایالات متحدهٔ آمریکاست، در یک سخن‌رانی سه ساعته در انستیتوی نیوتن در کیمبریج انگلستان، برهانی برای آخرین قضیهٔ فرما عرضه کرد. این خبر به سرعت در سر تا سر جهان پیچید و هرچند که در ابتدا در این برهان دویست صفحه‌ای اشکالی پیدا شد، کمتر از دو سال بعد وایلز به اتفاق یکی از شاگردانش به نام تیلر موفق به رفع این اشکال شد و آخرین قضیهٔ فرما بالاخره اثبات شد.

اثباتِ آخرین قضیهٔ فرما، مرز شاخه‌های مختلف را در هم نوردیده و به نوعی بیان‌گر گوهر وحدت ریاضیات است. ابتدا دقت می‌کنیم که یافتن جواب‌های صحیح معادلهٔ

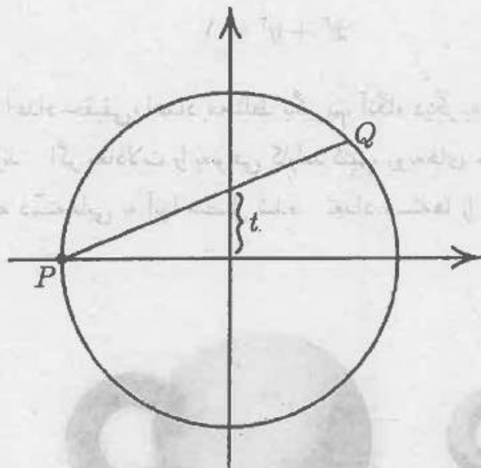
$$x^n + y^n = z^n \tag{۱}$$

معادل است با یافتن جواب‌های گویای معادلهٔ

$$X^n + Y^n = 1. \tag{۲}$$

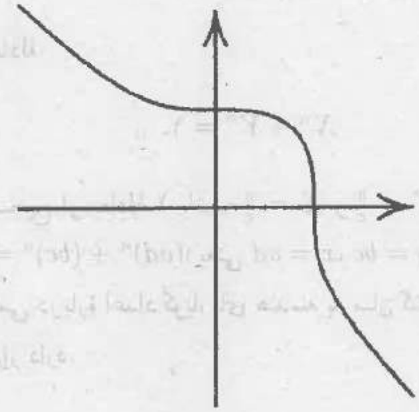
اگر $x = a$، $y = b$ و $z = c$ جوابی صحیح از معادلهٔ ۱ باشد، $X = \frac{a}{c}$ و $Y = \frac{b}{c}$ جواب گویای معادلهٔ ۲ است و اگر $X = \frac{a}{b}$ و $Y = \frac{c}{d}$ در ۲ صدق کنند آنگاه $(ad)^n + (bc)^n = (bd)^n$؛ یعنی $x = ad$، $y = bc$ و $z = cd$ جواب معادلهٔ ۱ است.

با بیان قضیهٔ آخر فرما به‌صورت حکمی دربارهٔ اعداد گویا، پای هندسه به میان کشیده می‌شود؛ مثلاً $x^2 + y^2 = 1$ معادلهٔ دایره‌ای به شعاع واحد است که مرکزش در مبدأ قرار دارد.



حل (۲) در دستگاه اعداد گویا، معادل این است که نقاطی با مختصات گویا روی دایره بیابیم که این کار به سادگی امکان‌پذیر است: می‌خواهیم نقطه‌ای روی دایره پیدا کنیم که مختصاتش گویا باشد. نقطه‌ای مثل P به دلخواه روی دایره می‌گیریم(در اینجا P را $(-1, 0)$ گرفته‌ایم که مطلب کمی ساده‌تر شود). برای نقطهٔ دلخواهی مثل Q روی دایره، PQ را رسم می‌کنیم. PQ محور y ها را در نقطه‌ای با عرض مثلاً t قطع می‌کند. به‌سادگی دیده می‌شود که مختصات Q گویاست اگر و فقط اگر t گویا باشد؛ پس برای یافتن نقطه‌ای به مختصات گویا روی دایره، کافی‌ست از P خطی رسم کنیم که محور y ها را در نقطه‌ای که فاصله‌اش از مبدأ گویاست قطع کند و در نتیجه، جوابی گویا برای معادله به‌دست می‌آید؛ مثلاً اگر $t = \frac{1}{2}$، Q نقطهٔ $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ است و یا اگر $t = \frac{2}{3}$، Q نقطهٔ $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$ است که جواب‌های $(3, 4, 5)$ و $(5, 12, 13)$ را برای معادلهٔ فرما به‌دست می‌دهد. در واقع، در حالت $n = 2$ جواب‌های معادلهٔ (۲) به‌خاطر ویژگی‌های دایره به سهولت به روش هندسی حاصل می‌شوند؛ ولی چنین راهی برای n های دیگر کارساز نیست، زیرا با شکل‌هایی به شکیلی دایره سر و کار نداریم. برای n دلخواه بزرگ‌تر از دو نیز دنبال نقاطی با مختصات گویا روی خم $x^n + y^n = 1$ می‌گردیم و مشکلات از آنجا ناشی می‌شوند که دیگر با شکل هندسی مناسبی مثل دایره سر و کار نداریم. ریاضیدانان اما پیش‌تر رفتند و خود را به ویژگی‌های هندسی

خم‌ها محدود نکردند و سعی کردند با تعمیم مسأله، افق‌های جدیدی پیدا کنند و مفاهیم ریاضی پیچیده‌تری را وارد مسأله کرده و به‌کار گیرند؛ مثلاً می‌توانیم درگام اول، هر چندجمله‌ای دلخواهی بر حسب دو متغیر x و y را در نظر گرفته و دنبال ریشه‌های گویای آن بگردیم و یا حتی ممکن است روی همهٔ معادلات دلخواه این کار را انجام دهیم. همان‌طور که ذکر شد، این تعمیم مسأله و گسترش افق آن ابزارهای جدیدی را در خدمت قرار می‌دهد که امکان زیر و رو کردن مسأله را فراهم می‌کنند و البته، از نظر دو نداریم که قضیهٔ فرما به‌صورت حالت خاص هر یک از این تعمیم‌ها مطرح می‌شود.



$$x^۳ + y^۳ = ۱$$

اگر حوزهٔ تغییرات x و y را به‌جای اعداد حقیقی، اعداد مختلط بگیریم، آنگاه دیگر به‌جای خم‌ها با رویه‌ها سر و کار خواهیم داشت؛ رویه‌هایی که از ویژگی خاصی برخوردارند. اگر معادلات را به‌نوعی کارآمد کنیم، رویه‌های خاصی مطرح می‌شوند؛ مثلاً دسته‌ای از رویه‌ها یا به‌شکل کره‌اند و یا به‌شکل کره‌هایی که دسته‌هایی به آنها متصل شده. تعداد دسته‌ها را گونهٔ رویه می‌نامیم.

گونهٔ ۲   گونهٔ ۱   گونهٔ صفر

گونه برای معادلهٔ فرما با مرتبهٔ n با $\frac{۱}{۲}(n-۱)(n-۲)$ برابر است. مسأله به این منجر می‌شود که یافتن ریشه‌های گویا، به گونهٔ معادله مربوط است. گونهٔ بزرگ‌تر، ساختار هندسی پیچیده‌تری به‌همراه دارد و در نتیجه، یافتن جواب‌های گویا دشوارتر می‌شود.

ساده‌ترین حالت، وقتی‌ست که گونه صفر است که به

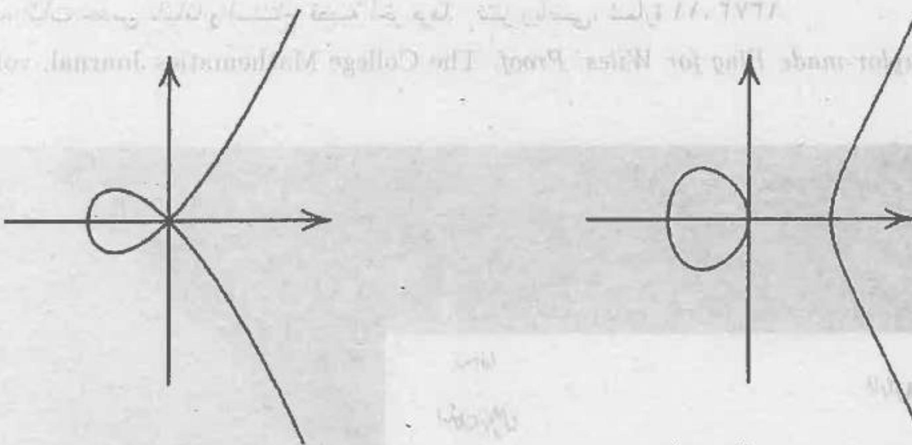
$$x^۲ + y^۲ = k$$

ــ همان معادلهٔ فیثاغورس ــ می‌رسیم که دو حالت مطرح می‌شود: یا اصلاً جوابی نداریم، مثل

$$x^۲ + y^۲ = -۱,$$

و با همان‌طور که ذکر کردیم به بینهایت جواب می‌رسیم.

وقتی با خم‌هایی با گونهٔ ۱ سر و کار پیدا کنیم کار خیلی دشوارتر می‌شود. این خم‌ها را خم‌های بیضوی می‌نامیم(این نام‌گذاری از آنجا مطرح شده که این خم‌ها در محاسبهٔ طول بخشی از یک بیضی ظاهر می‌شوند). خم‌های بیضوی(که دو نمونهٔ آنها را در شکل می‌بینیم) کاربردهای بسیار مفیدی در نظریهٔ اعداد دارند؛ مثلاً در تجزیهٔ اعداد بزرگ به اعداد اول(به‌وسیلهٔ کامپیوتر) از ویژگی‌های خم‌های بیضوی استفاده می‌شود.



$y^2 = x^3 + x^2$ $\qquad$ $y^2 = x^3 - x$

ممکن است یک خم بیضوی از هیچ نقطه‌ای با مختصات گویا نگذرد؛ ولی اگر بگذرد اتفاق جالبی می‌افتد که ریاضیدان انگلیسی موردل[1] در اوایل قرن بیستم ملاحظه کرد. موردل نشان داد که اگر جواب‌هایی موجود باشند، لزوماً مجموعه‌ای متناهی از جواب‌ها موجود است که تولید کنندهٔ بقیهٔ جواب‌هاست. این البته نتیجهٔ خوبی‌ست؛ ولی واقعیت این است که اگر دنبال قضیهٔ فرما باشیم دیگر به گونهٔ ۱ محدود نیستیم و به خم‌هایی با گونه‌های بزرگ‌تر می‌رسیم. موردل در این مورد هم حدس زد که معادلهٔ فرما به‌صورت (۲)، وقتی $n > 2$ حداکثر متناهی جواب گویا دارد.

حدس موردل را فالتینگز[2] در ۱۹۸۳ ثابت کرد و این اثبات در زمان خود بسیار بااهمیت تلقی شد. فالتینگز از ایده‌های بسیار پیچیده‌ای استفاده کرد که اول بار در سال ۱۹۴۷ در کارهای آندره ویل[3] ظاهر شده‌بود.

در سال ۱۹۵۵، ریاضیدان ژاپنی تانیاما[4] فکر کرد که باید رابطه‌ای بین خم‌های بیضوی و نوع دیگری از خم‌های پیچیده که خم‌های مدولار نامیده می‌شوند وجود داشته‌باشد: او حدس زد که هر خم بیضوی، مدولار است. بعدها آندره ویل و گورو شیمورا[5] نیز به این مسأله پرداختند و آن را دقیق‌تر کردند که به حدس شیمورا ــ تانیاما ــ ویل معروف شد. بالاخره، در سال ۱۹۸۶ بود که رابطه‌ای بین مسألهٔ فرما و این حدس شناخته شد.

فری[6] در سال ۱۹۸۶ ملاحظه کرد که اگر برای اعداد a، b، c و n داشته‌باشیم $c^n = a^n + b^n$، خمی بیضوی به‌صورت

$$y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$$

به شیوه‌ای که تانیاما پیشنهاد کرد حاصل می‌شود. پیرو آن، ژان پیر سر[7] و کنت ریبت[8] ثابت کردند که اگر مثال نقضی برای آخرین قضیهٔ فرما موجود باشد آنگاه یک خم بیضوی موجود خواهد بود که مدولار نیست و لذا حدس شیمورا ــ تانیاما ــ ویل باطل می‌شود. پس، اثبات حدس شیمورا ــ تانیاما ــ ویل، آخرین قضیهٔ فرما را نتیجه می‌دهد!

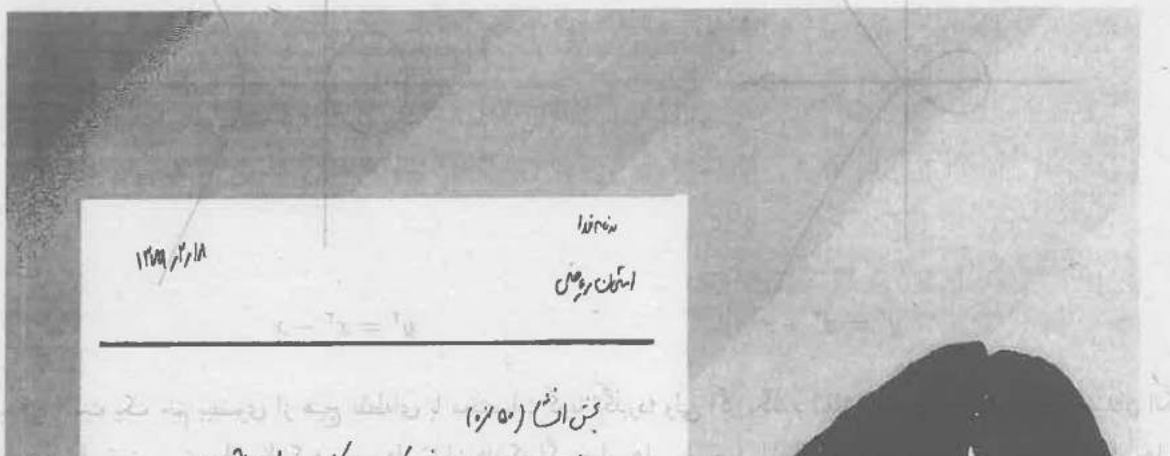
1) Lewis Mordell 2) Gred Faltings 3) André Weil 4) Yutaka Taniyama 5) Goro Shimura 6) Gerhard Frey 7) Jean Pierre Serre 8) Kenneth Ribet

دیگر راه ادامهٔ کار مشخص شده بود: حدس شیمورا ــ تانیاما ــ ویل با اشیایی سر و کار دارد که ویژگی‌های هندسی زیادی برای آنها شناخته شده است. بالاخره، همان‌طور که ذکر شد، اندرو وایلز این مهم را به اثبات رساند. تلاش انسانی اما همچنان ادامه دارد؛ تلاشی که برآیند هم‌بستگی همهٔ انسان‌ها با ملیت‌های گوناگون در راه پیش‌برد علم است. وایلز در سال ۱۹۹۹ به همراه چند تن از دانشجویانش قضیهٔ کلی‌تری را ثابت کرده است که حدس شیمورا ــ تانیاما ــ ویل و در نتیجه آخرین قضیهٔ فرما از آن نتیجه می‌شود. مسیر تلاش بیشتر، همیشه باز است.

مراجع

[۱] کنت ریبت، اثبات حدس تانیاما و استنتاج قضیهٔ آخر فرما. نشر ریاضی، شمارهٔ ۱۱، ۱۳۷۲.

[2] N. Bosto, *A Taylor-made Plug for Wiles' Proof.* The College Mathematics Journal, vol. 26, no. 3, March 1995.



امتحان ریاضی به سبک جدید!

تابع حسابی اویلر

محمدرضا پورنکی

چکیده

در این مقالهٔ توصیفی، پس از تعریف تابع حسابی اویلر، قضیهٔ اویلر را ثابت خواهیم کرد، سپس فرمولی برای محاسبهٔ مقدار این تابع ارایه خواهد شد و در پایان نیز به ذکر خاصیتی مهم از این تابع خواهیم پرداخت.

مقدمه

در فصل ۶ کتاب ریاضیات گسستهٔ دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ علوم ریاضی، تابع حسابی اویلر در بخشی تحت نام مجلهٔ ریاضی تعریف شده و سپس قضیهٔ اویلر بیان شده‌است. در قضیه‌ای در فصل ۷ این کتاب هم به کمک اصل شمول و عدم شمول فرمولی برای محاسبهٔ مقدار این تابع در حالتی خاص ارایه شده‌است. در این مقالهٔ توصیفی، هدف آن است که پس از تعریف تابع حسابی اویلر، به اثبات قضیهٔ اویلر بپردازیم و سپس فرمول خاص ذکر شده در بالا را به شکل کلی تبدیل کنیم و یک خاصیت مهم این تابع را ثابت کنیم. در پایان نیز چند مسألهٔ مربوط به این مبحث را جهت حل مطرح می‌کنیم.

تابع حسابی اویلر و دستگاه مخفف مانده‌ها

در زیر، نمادی را معرفی می‌کنیم که منسوب به اویلر است و در ریاضیات به‌طور وسیع از آن استفاده می‌شود.

تعریف ۱. *برای هر عدد طبیعی n، $\phi(n)$ برابر است با تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از یا مساوی با n که نسبت به n اولند.*

توجه می‌کنیم که این ضابطه، تابعی روی اعداد طبیعی تعریف می‌کند که آن را تابع حسابی اویلر(یا تابع فی اویلر) می‌نامند.

مثال ۱. $\phi(۶) = ۲$*؛ زیرا بین اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ فقط دو عدد، ۱ و ۵، هستند که نسبت به ۶ اولند.*

تذکر. توجه می‌کنیم که $\phi(۱) = ۱$؛ زیرا ۱ نسبت به ۱ اول است! همچنین برای هر $n > ۱$، با توجه به این‌که $(n, n) = n > ۱$[۱]، $\phi(n)$ برابر است با تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n که نسبت به n اولند.

مثال ۲. *اگر p عددی اول باشد آنگاه $\phi(p) = p - ۱$؛ زیرا تمام $p - ۱$ عدد طبیعی کوچک‌تر از p نسبت به p اولند.*

اکنون زیرمجموعه‌هایی از اعداد صحیح را معرفی می‌کنیم که ارتباطی نزدیک با مفهوم تابع حسابی اویلر دارند.

تعریف ۲. *فرض‌کنیم n عددی طبیعی باشد. زیرمجموعهٔ R از اعداد صحیح را یک دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n می‌نامیم هرگاه هر عضو R نسبت به n اول باشد و هر عدد صحیح که نسبت به n اول است دقیقاً با یکی از اعضای R به پیمانهٔ n همنهشت باشد.*

---

۱) برای دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آنها غیر صفر است، (a, b) را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b درنظر می‌گیریم.

مثال ۳. *برای $n = ۶$، زیرمجموعهٔ $R = \{۱, ۵\}$ از اعداد صحیح را در نظر می‌گیریم. هر عضو R نسبت به ۶ اول است. حال فرض می‌کنیم x عددی صحیح باشد که نسبت به ۶ اول است. x به پیمانهٔ ۶ دقیقاً با یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ همنهشت است؛ اما چون $(x, ۶) = ۱$ پس لزوماً x درست با یکی از اعداد ۱ و ۵ به پیمانهٔ ۶ می‌تواند همنهشت باشد و لذا R یک دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ ۶ است.*[۱]

مثال ۴. *برای $n = p$ که p عددی اول است، زیرمجموعهٔ $R = \{۱, ۲, \ldots, p - ۱\}$ از اعداد صحیح را در نظر می‌گیریم؛ هر عضو R نسبت به p اول است. حال فرض می‌کنیم x عددی صحیح باشد که نسبت به p اول است. x به پیمانهٔ p دقیقاً با یکی از اعداد $۱, \ldots, p$ همنهشت است؛ اما چون $(x, p) = ۱$ پس لزوماً x درست با یکی از اعداد $۱, \ldots, p - ۱$ به پیمانهٔ p می‌تواند همنهشت باشد و لذا R یک دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ p است.*

در مثال‌های ۱ و ۲ دیدیم که $\phi(۶) = ۲$ و $\phi(p) = p - ۱$ که در آن p عددی اول است. در مثال‌های ۳ و ۴ هم دیدیم که تعداد اعضای دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ ۶ و دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ p به‌ترتیب برابراست با ۲ و $p - ۱$. این امر تصادفی نیست و در لم ۱ ثابت می‌کنیم که تعداد اعضای هر دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n برابر است با $\phi(n)$.

فرض‌کنیم n عددی طبیعی باشد. اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را در نظر می‌گیریم و از بین این فهرست اعداد آنهایی که نسبت به n اولند را جدا می‌کنیم و آنها را $i_۱, i_۲, \ldots, i_{\phi(n)}$ می‌نامیم(این‌که تعداد این اعداد برابر $\phi(n)$ است، بنا بر تعریف ۱ واضح است). ادعا می‌کنیم $R_n = \{i_۱, i_۲, \ldots, i_{\phi(n)}\}$ یک دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n است: ابتدا توجه می‌کنیم که هر عضو R_n نسبت به n اول است. حال فرض می‌کنیم x عددی صحیح باشد که نسبت به n اول است. واضح است که x به پیمانهٔ n دقیقاً با یکی از اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ همنهشت است؛ اما چون $(x, n) = ۱$ پس لزوماً x درست با یکی از اعداد $i_۱, i_۲, \ldots, i_{\phi(n)}$ به پیمانهٔ n می‌تواند همنهشت باشد و لذا R_n یک دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n است.

تعریف ۳. *برای عدد طبیعی دادهٔ‌شدهٔ n، زیرمجموعهٔ R_n از اعداد صحیح که در بالا معرفی‌شد را دستگاه استاندارد مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n می‌نامیم.*

لم ۱. *اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه تعداد اعداد صحیح در هر دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n برابر $\phi(n)$ است.*

برهان. فرض‌کنیم $R = \{r_۱, \ldots, r_k\}$ و $S = \{s_۱, \ldots, s_l\}$ هر دو دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n باشند. هر عضو R نسبت به n اول است و چون S و R هر دو دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n هستند، هر عضو R دقیقاً با یک عضو S به پیمانهٔ n همنهشت است و هیچ دو عضوی از R با یک عضو S به پیمانهٔ n همنهشت نیستند و برعکس، چون هر عضو S نسبت به n اول است و R و S هر دو دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n هستند، هر عضو S دقیقاً با یک عضو R به پیمانهٔ n همنهشت است و هیچ دو عضوی از S با یک عضو R به پیمانهٔ n همنهشت نیستند؛ بنابراین $k = l$ و لذا تعداد اعضای هر دو دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n برابر است. حال چون R_n، دستگاه استاندارد مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n، $\phi(n)$ عضو دارد، پس تعداد اعضای تمام دستگاه‌های مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n برابر $\phi(n)$ است. ■

نتیجه ۱. *فرض‌کنیم n عددی طبیعی باشد و $R = \{r_۱, \ldots, r_{\phi(n)}\}$ و $S = \{s_۱, \ldots, s_{\phi(n)}\}$ هر دو دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n در این صورت، $r_۱ \cdots r_{\phi(n)} \equiv s_۱ \cdots s_{\phi(n)}$ (پیمانهٔ n).*

برهان. از برهان لم ۱ نتیجه می‌شود که $r_۱ \equiv s_{j_۱}$ (پیمانهٔ n)، $r_۲ \equiv s_{j_۲}$ (پیمانهٔ n)، ...، $r_{\phi(n)} \equiv s_{j_{\phi(n)}}$ (پیمانهٔ n) که در آن $j_۱, \ldots, j_{\phi(n)}$ همان اعداد $۱, \ldots, \phi(n)$ هستند(احتمالاً با ترتیبی دیگر) و لذا به‌دست می‌آوریم

$$r_۱ \cdots r_{\phi(n)} \equiv s_{j_۱} \cdots s_{j_{\phi(n)}} \equiv s_۱ \cdots s_{\phi(n)} \ (\text{پیمانهٔ } n).$$

■

۱) توجه می‌کنیم که هریک از $\{۷, ۱۱\}$ و $\{-۱, -۵\}$ و $\{۵, ۲۵\}$ و ... نیز یک دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ ۶ است.

لم ۲. فرض‌کنیم n عددی طبیعی باشد و R یک دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n. اگر a عددی صحیح باشد که $(a,n)=۱$ آنگاه $aR=\{ar \mid r\in R\}$ نیز یک دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n خواهد بود.

برهان. چون R دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n است، برای هر $r\in R$، $(r,n)=۱$ و چون $(a,n)=۱$ پس $(ar,n)=۱$؛ یعنی هر عضو aR نسبت به n اول است. حال فرض کنیم x عددی صحیح باشد که نسبت به n اول است؛ یعنی $(x,n)=۱$. چون $(a,n)=۱$، اعداد صحیح t و t' موجودند که $ta+t'n=۱$. توجه می‌کنیم که $(t,n)=۱$؛ پس $(x,n)=۱$ نتیجه می‌دهد $(tx,n)=۱$. از این که R دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n است نتیجه می‌شود که $r\in R$ موجود است که $tx\equiv r$ (پیمانهٔ n) و در نتیجه برای عددی صحیح مثل l، $tx=r+nl$. اکنون $ta+t'n=۱$ نتیجه می‌دهد که $x=tax+t'nx$ و لذا

$$x=(r+nl)a+t'nx=ar+nla+t'nx\equiv ar \ (\text{پیمانهٔ } n);$$

پس ثابت کردیم که x با یکی از اعضای aR به پیمانهٔ n همنهشت است. حال نشان می‌دهیم که x نمی‌تواند با عضو دیگری به پیمانهٔ n همنهشت باشد: اگر $x\equiv ar'$ (پیمانهٔ n) آنگاه $ar\equiv ar'$ (پیمانهٔ n) و $(a,n)=۱$ نتیجه می‌دهد که $r\equiv r'$ (پیمانهٔ n) و چون R دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n است پس $r=r'$؛ یعنی ثابت کرده‌ایم که هر عدد صحیح که نسبت به n اول است با یکی از اعضای aR و فقط با یکی به پیمانهٔ n همنهشت است و درنتیجه بنا بر تعریف ۲، aR دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n خواهدبود. ■

قضیه ۱. *(قضیهٔ اویلر) اگر n عددی طبیعی باشد و a عددی صحیح که $(a,n)=۱$ آنگاه $a^{\phi(n)}\equiv ۱$ (پیمانهٔ n).*

برهان. فرض‌کنیم $R_n=\{i_۱,\ldots,i_{\phi(n)}\}$ دستگاه استاندارد مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n باشد. چون $(a,n)=۱$، لم ۲ نتیجه می‌دهد که $aR_n=\{ai_۱,\ldots,ai_{\phi(n)}\}$ هم یک دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n است؛ پس از نتیجهٔ ۱ به‌دست می‌آوریم $(ai_۱)\cdots(ai_{\phi(n)})\equiv i_۱\cdots i_{\phi(n)}$ (پیمانهٔ n) یا $a^{\phi(n)}i_۱\cdots i_{\phi(n)}\equiv i_۱\cdots i_{\phi(n)}$ (پیمانهٔ n). چون $i_۱,\ldots,i_{\phi(n)}$ نسبت به n اولند، $i_۱\cdots i_{\phi(n)}$ هم نسبت به n اول است و در نتیجه، $a^{\phi(n)}\equiv ۱$ (پیمانهٔ n). ■

نتیجه ۲. *(قضیهٔ کوچک فرما) اگر p عددی اول باشد و a عددی صحیح که $(a,p)=۱$ آنگاه $a^{p-۱}\equiv ۱$ (پیمانهٔ p).*

برهان. با توجه به مثال ۲، ۱ – ۱، $\phi(p)=p-۱$ و حکم از قضیهٔ اویلر به‌دست می‌آید. ■

نتیجه ۳. *اگر p عددی اول باشد و a عددی صحیح آنگاه $a^p\equiv a$ (پیمانهٔ p).*

برهان. دو حالت وجود دارد: یا $(a,p)=۱$ و یا $(a,p)\neq ۱$. اگر $(a,p)=۱$، بنا بر قضیهٔ کوچک فرما $a^{p-۱}\equiv ۱$ (پیمانهٔ p) و لذا $a^p\equiv a$ (پیمانهٔ p). اگر $(a,p)\neq ۱$ آنگاه $(a,p)=p$ و لذا a مضرب p خواهد بود؛ پس $a\equiv ۰$ (پیمانهٔ p) و $a^p\equiv ۰$ (پیمانهٔ p) و لذا $a^p\equiv a$ (پیمانهٔ p). ■

فرمول محاسبهٔ مقدار تابع حسابی اویلر

در این بخش خاصیت مهمی از تابع حسابی اویلر را که به خاصیت ضربی معروف است ثابت خواهیم کرد. این خاصیت، فرمول محاسبهٔ تابع حسابی اویلر را به‌دست می‌دهد.

لم ۳. *فرض‌کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند و R و S به‌ترتیب دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n و m. اگر $(m,n)=۱$، آنگاه $A=\{mr+ns \mid r\in R, s\in S\}$ یک دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ mn است.*

برهان. چون R و S به‌ترتیب دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n و m هستند، برای هر $r\in R$ و هر $s\in S$، $(r,n)=۱$ و $(s,m)=۱$؛ لذا $(m,n)=۱$ نتیجه می‌دهد که $(mr,n)=۱$ و $(ns,m)=۱$ پس $(mr+ns,n)=۱$ و $(mr+ns,m)=۱$ و در نتیجه، $(mr+ns,mn)=۱$؛ یعنی هر عضو A نسبت به mn اول است. حال فرض کنیم x عددی صحیح باشد که نسبت به mn اول

است؛ یعنی $(x, mn) = 1$. چون $(m, n) = 1$، بنا بر لم ۲ مجموعه‌های mR و nS به‌ترتیب دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n و m هستند؛ در نتیجه، بنا بر تعریف ۲ و با توجه به این که $(x, n) = 1$ و $(x, m) = 1$، $r \in R$ و $s \in S$ هستند که (پیمانهٔ m) $x \equiv ns$ و (پیمانهٔ n) $x \equiv mr$ و در نتیجه، (پیمانهٔ m) $x \equiv mr + ns$ و (پیمانهٔ n) $x \equiv mr + ns$. اکنون از $(m, n) = 1$ به‌دست می‌آوریم (پیمانهٔ mn) $x \equiv mr + ns$؛ پس ثابت کردیم که x با یکی از اعضای A به پیمانهٔ mn همنهشت است. حال نشان می‌دهیم که x نمی‌تواند با عضو دیگری از A همنهشت باشد: اگر (پیمانهٔ mn) $x \equiv mr' + ns'$ آنگاه (پیمانهٔ mn) $mr + ns \equiv mr' + ns'$ و در نتیجه (پیمانهٔ m) $mr + ns \equiv mr' + ns'$ و (پیمانهٔ n) $mr + ns \equiv mr' + ns'$؛ پس داریم (پیمانهٔ m) $ns \equiv ns'$ و (پیمانهٔ n) $mr \equiv mr'$. $(m, n) = 1$ نتیجه می‌دهد که (پیمانهٔ m) $s \equiv s'$ و (پیمانهٔ n) $r \equiv r'$ و چون R و S به‌ترتیب دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n و m هستند، $s = s'$ و $r = r'$؛ یعنی $mr + ns = mr' + ns'$ و در نتیجه، ثابت کرده‌ایم که هر عدد صحیح که نسبت به mn اول باشد، دقیقاً با یکی از اعضای A به پیمانهٔ mn همنهشت است و لذا بنا بر تعریف ۲، A دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ mn خواهد بود. ■

لم ۴. *تابع حسابی اویلر دارای خاصیت ضربی است؛ یعنی برای هر دو عدد طبیعی m و n که $(m, n) = 1$، $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.*

برهان. فرض می‌کنیم R دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ n و S دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ m باشد؛ پس بنا بر لم ۱، تعداد اعضای R برابر $\phi(n)$ و تعداد اعضای S برابر $\phi(m)$ است و لذا $A = \{mr + ns \mid r \in R, s \in S\}$ دارای $\phi(m)\phi(n)$ عضو خواهد بود. اما $(m, n) = 1$ و بنا بر لم ۳، A دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانهٔ mn است، پس مجدداً بنا بر لم ۱ باید دارای $\phi(mn)$ باشد؛ پس لزوماً $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$. ■

نتیجه ۴. *فرض کنیم $p_1, \ldots, p_k$ اعداد اول متمایز باشند و $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ اعداد طبیعی؛ در این صورت*

$$\phi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \phi(p_1^{\alpha_1}) \cdots \phi(p_k^{\alpha_k}).$$

برهان. چون $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$ دو به دو نسبت به هم اولند، حکم به استقرا از لم ۴ نتیجه می‌شود. ■

توجه می‌کنیم که بنا بر نتیجهٔ ۴، برای به‌دست آوردن فرمول محاسبهٔ مقدار تابع ϕ، کافی‌ست مقدار ϕ را برای توان‌های اعداد اول بدانیم. لم زیر این منظور را برآورده می‌کند.

لم ۵. *اگر p عددی اول باشد و α عددی طبیعی، $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.*

برهان. اعداد $1, 2, \ldots, p^\alpha$ را که تعدادشان p^α است در نظر می‌گیریم. از بین این اعداد، می‌خواهیم تعداد آنهایی را که نسبت به p^α اولند محاسبه کنیم. اگر x عددی از این فهرست باشد که $(x, p^\alpha) \neq 1$ آنگاه $(x, p^\alpha) = p^t$ و لذا x مضرب p خواهد بود و برعکس، اگر x مضرب p باشد آنگاه $(x, p^\alpha) \neq 1$؛ پس در این فهرست، اعدادی که نسبت به p اول نیستند دقیقاً مضارب p هستند که عبارتند از $p, p^2, \ldots, p^{\alpha-1}p$ که تعدادشان $p^{\alpha-1}$ است؛ پس $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$. ■

قضیه ۲. **(فرمول محاسبهٔ مقدار تابع حسابی اویلر)** *اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه*

$$\phi(n) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n = 1 \\ n \prod\limits_{\substack{p \mid n \\ \text{اول } p}} (1 - \frac{1}{p}) & \text{اگر } n > 1 \end{cases}$$

تذکر. در قضیهٔ فوق، $\prod\limits_{\substack{p \mid n \\ \text{اول } p}} (1 - \frac{1}{p})$ یعنی حاصل ضرب $(1 - \frac{1}{p})$ ها به ازای تمام p های اولی که شمارندهٔ n هستند.

برهان. واضح است که اگر $n = ۱$ آنگاه $\phi(n) = ۱$. برای $n > ۱$ بنا بر قضیهٔ اساسی حساب می‌توانیم بنویسیم $n = p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_k^{\alpha_k}$ که در آن $p_۱, \dots, p_k$ اعداد اول متمایزند و $\alpha_۱, \dots, \alpha_k$ اعداد طبیعی. بنا بر نتیجهٔ ۴ و لم ۵ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= \phi(p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_k^{\alpha_k}) \\
&= \phi(p_۱^{\alpha_۱}) \cdots \phi(p_k^{\alpha_k}) \\
&= (p_۱^{\alpha_۱} - p_۱^{\alpha_۱ - ۱}) \cdots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - ۱}) \\
&= p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_k^{\alpha_k}(۱ - \frac{۱}{p_۱}) \cdots (۱ - \frac{۱}{p_k}) \\
&= n(۱ - \frac{۱}{p_۱}) \cdots (۱ - \frac{۱}{p_k}) \\
&= n \prod_{\substack{p|n \\ \text{اول } p}} (۱ - \frac{۱}{p}).
\end{aligned}$$

■

مثال ۵. توجه می‌کنیم که $۹۰ = ۲ \times ۳^۲ \times ۵$ و لذا

$$\phi(۹۰) = ۹۰ \prod_{\substack{p|۹۰ \\ \text{اول } p}} (۱ - \frac{۱}{p}) = ۹۰(۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۳})(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۲۴.$$

اکنون یک خاصیت مهم دیگر از تابع حسابی را مطرح می‌کنیم. برای این منظور، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۶. *اگر n عددی طبیعی باشد و $d|n$ آنگاه تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از یا مساوی با n که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان با n برابر d است مساوی‌ست با $\phi(\frac{n}{d})$.*

برهان. مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{N} | ۱ \leq x \leq n, (x, n) = d\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} | ۱ \leq x \leq \frac{n}{d}, (x, \frac{n}{d}) = ۱\}$ را در نظر می‌گیریم. A مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از یا مساوی با n است که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان با n برابر d است، پس تعداد اعضای A همان تعداد مطلوب در حکم است. B هم مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از یا مساوی با $\frac{n}{d}$ است که نسبت به $\frac{n}{d}$ اول هستند و تعدادشان بنا بر تعریف ۱ برابر $\phi(\frac{n}{d})$ است. اکنون اگر ثابت کنیم یک تناظر دوسویی بین A و B موجود است، لم ثابت می‌شود. برای این منظور، تابع $f : A \longrightarrow B$ را با $f(x) = \frac{x}{d}$ در نظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم که f به ازای هر x در A تعریف شده است؛ چون وقتی $x \in A$ داریم $n \leq x \leq ۱$ و $(x, n) = d$، $۱ \leq \frac{x}{d} \leq \frac{n}{d}$ و $(\frac{x}{d}, \frac{n}{d}) = ۱$ و لذا $\frac{x}{d} \in B$؛ پس تعریف f خالی از ایراد است. اگر $f(x) = f(x')$ آنگاه $\frac{x}{d} = \frac{x'}{d}$ و لذا $x = x'$ که نشان می‌دهد f یک‌به‌یک است. حال گیریم $y \in B$ عضوی دلخواه از B باشد؛ پس $۱ \leq y \leq \frac{n}{d}$ و $(y, \frac{n}{d}) = ۱$. قرار می‌دهیم $x = yd$؛ پس $۱ \leq x \leq n$ و $(x, n) = d$ و لذا $x \in A$ و چون $f(x) = y$، f پوشاست. f یک تناظر دوسویی بین A و B است و حکم ثابت می‌شود. ■

قضیه ۳. *برای هر عدد طبیعی n،*

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n.$$

تذکر. در قضیهٔ فوق، $\sum_{d|n} \phi(d)$ یعنی مجموع $\phi(d)$ ها به ازای تمام d های مثبت که شمارندهٔ n هستند.

برهان. تعریف می‌کنیم $A_d = \{x \in \mathbb{N} | ۱ \leq x \leq n, (x, n) = d\}$. بنا بر لم ۶، اگر $d|n$ آنگاه $|A_d| = \phi(\frac{n}{d})$ و به وضوح اگر $d \nmid n$ آنگاه $|A_d| = ۰$ ($|A_d|$ تعداد اعضای A_d است). اگر $x \in A_d \cap A_{d'}$ آنگاه $(x, n) = d$ و $(x, n) = d'$ و لذا $d = d'$؛ پس

برای d های متمایز، A_d ها جدا از هم هستند. گیریم x عددی طبیعی باشد که $1 \leq x \leq n$. اگر $(x,n) = d$ آنگاه $x \in A_d$؛ یعنی $\bigcup_{d=1}^{n} A_d = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\}$. جدا از هم بودن A_d ها نتیجه می‌دهد که

$$n = |\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\}| = \left|\bigcup_{d=1}^{n} A_d\right| = \sum_{d=1}^{n} |A_d| = \sum_{d|n} |A_d| = \sum_{d|n} \phi(\frac{n}{d}).$$

توجه می‌کنیم که اگر $\{d_1, \ldots, d_l\}$ مجموعهٔ تمام شمارنده‌های مثبت n باشد آنگاه $\{\frac{n}{d_1}, \ldots, \frac{n}{d_l}\}$ نیز برابر همین مجموعه است و لذا $\sum_{d|n} \phi(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \phi(d)$ و در نتیجه، $\sum_{d|n} \phi(n) = n$. ■

مثال ۶. *درستی قضیهٔ ۳ را به ازای $n = 10$ بررسی می‌کنیم. داریم*

$$\begin{aligned}\sum_{d|10} \phi(d) &= \phi(1) + \phi(2) + \phi(5) + \phi(10)\\ &= 1 + 1 + 4 + 4\\ &= 10.\end{aligned}$$

تمرین.

۱) فرض کنید $n > 2$ عددی طبیعی باشد. ثابت کنید $\phi(n)$ زوج است.

۲) فرض کنید $n > 1$ عددی طبیعی باشد. ثابت کنید مجموع $\phi(n)$ عدد کوچک‌تر از یا مساوی با n که نسبت به n اولند برابر است با $\frac{1}{2}n\phi(n)$.

۳) فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند که $n|m$. ثابت کنید $\phi(n)|\phi(m)$.

۴) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $\phi(n^2) = n\phi(n)$.

۵) فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند و $(m,n) = d$. ثابت کنید

$$\phi(mn) = \frac{d\phi(m)\phi(n)}{\phi(d)}.$$

۶) کسر(عدد گویای) $\frac{a}{b}$ را تحویل ناپذیر می‌نامیم اگر $(a,b) = 1$. ثابت کنید تعداد کسرهای تحویل ناپذیر $\frac{a}{b}$ که $0 < \frac{a}{b} \leq 1$ و $1 \leq b < n$ برابر است با $\phi(1) + \cdots + \phi(n)$.

۷) فرض‌کنید a و b اعداد صحیح و نسبت به هم اول باشند. ثابت کنید که اعداد صحیح m و n موجودند که (پیمانهٔ ab) $a^m + b^n \equiv 1$.

۸) حدس زده شده است که برای هر عدد طبیعی n، عدد طبیعی $m \neq n$ هست که $\phi(m) = \phi(n)$. تاکنون درستی و یا نادرستی این حدس ثابت نشده است. ثابت کنید این حدس در حالتی که n یک عدد اول فرد باشد درست است. آیا این حدس در حالتی که n عدد فرد دلخواهی باشد نیز درست است؟

مراجع

[۱] ویلیام و. آدامز و لری جوئل گولدشتین، آشنایی با نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ آدینه محمد نارنجانی. مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ اول ۱۳۶۲.

[۲] نیل. اچ. مک‌کوی، نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ غلامحسین بهفروز و میرکمال میرنیا. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۳.

راهکارهای حل مسأله

سهیلا غلام‌آزاد

یکی از اهداف آموزش ریاضی، پرورش انسان‌های فهیم، نقاد و تصمیم‌گیرنده است؛ انسان‌هایی که در برخورد با موقعیت‌های جدید، بتوانند شرایط را به‌طور صحیحی تحلیل کنند و بهترین عکس‌العمل را از خود بروز دهند. لازمهٔ بروز رفتاری صحیح، داشتن ذهنی منظم و آشنایی با مهارت‌های تفکر است و یکی از عمده‌ترین مهارت‌های تفکر، مهارت و یا به عبارتی هنر حل مسأله است.

باب بحث در خصوص حل مسأله را اولین بار جورج پولیا در قالب کتاب چگونه مسأله را حل کنیم در سال ۱۹۴۴ گشود و از آن پس، حل مسأله موضوع بحث و پژوهش بسیاری از متخصصان آموزش ریاضی قرار گرفت. تاکنون، تحقیقات زیادی مؤید آن بوده‌اند که مهارت‌های حل مسأله قابل آموزش و یادگیری هستند و از این رو، برنامه‌ریزان بر آنند که این مقوله را وارد برنامه‌های درسی کنند. با توجه به اهمیت این موضوع، هیأت تحریریهٔ مجله تصمیم گرفت تا قبل از فراگیر شدن این برنامه در آموزش رسمی، باب آن را در مجله بگشاید و از پایه‌ای‌ترین مراحل، آموزش استراتژی‌های حل مسأله را پی بگیرد.

رسم شکل

حتماً این مَثَل قدیمی را که «شنیدن کی بود مانند دیدن» شنیده‌اید. بسیاری از مردم به این مثل معتقدند؛ اما هستند کسانی که برتری دیدن را بر شنیدن دقیقاً درک نمی‌کنند.

حتماً تا به حال توجه کرده‌اید که بعضی مردم برای توصیف ایده‌هایی که در ذهن دارند فقط توضیحاتی شفاهی می‌دهند، ولی عده‌ای دیگر هستند که به‌جای ارتباطات کلامی از شکل‌ها یا تصویرها استفاده می‌کنند. استفاده از شکل‌ها و تصویرها، به مراتب مزایای بیشتری نسبت به توضیح شفاهی دارد؛ مثلاً وقتی یک مهندس معمار ایده‌هایش را به‌صورت نقشه ارایه می‌کند، چیز زیادی برای توضیح نمی‌ماند. مزیت این نوع ارایه، این است که در تصویر، همهٔ اطلاعات و ارتباط آنها به‌صورت یک «کل» نشان داده می‌شود.

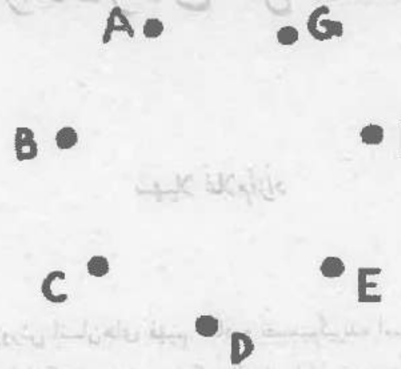
از جمله مراحل اصلی حل مسأله، جمع‌آوری اطلاعات و سازمان‌دهی مناسب آنهاست. وقتی برای حل مسأله‌ای شکلی می‌کشید، در واقع اطلاعات ارایه شده در صورت مسأله را در قالب یک شکل سازمان‌دهی می‌کنید و به این ترتیب، قسمت دیداری مغز بیشتر با فرایند حل مسأله درگیر می‌شود. از این روست که رسم شکل، یکی از استراتژی‌های خوب حل مسأله محسوب می‌شود. در حل مثال‌های زیر، اهمیت نقش شکلی مناسب را در حل سادهٔ مسأله می‌بینید.

مسابقات بسکتبال

قرار است یک دوره مسابقهٔ بسکتبال بین هفت تیم آهوها، خرس‌ها، روباه‌ها، شغال‌ها، بزها، گرگ‌ها و شیرها در سه فصل پاییز، زمستان و بهار برگزار شود؛ به این ترتیب که در هر فصل، هر یک از تیم‌ها یک بار در مقابل تیم‌های دیگر بازی می‌کند. در این دوره مسابقات، کلاً چند بازی انجام می‌شود؟

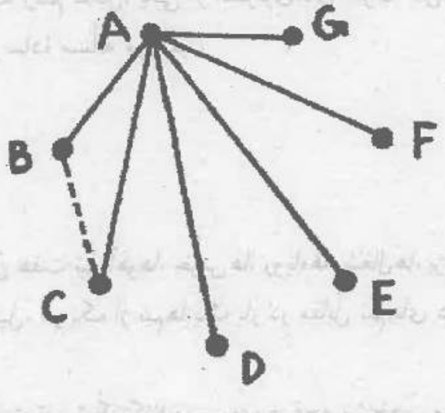
حل. ابتدا هفت نقطه ــ به نمایندگی از هفت تیم شرکت‌کننده ــ روی صفحه مشخص می‌کنیم.

رشد ... شمارهٔ ۱
(اردی‌بهشت ۱۳۷۹) صص ۳۰ـ۲۵

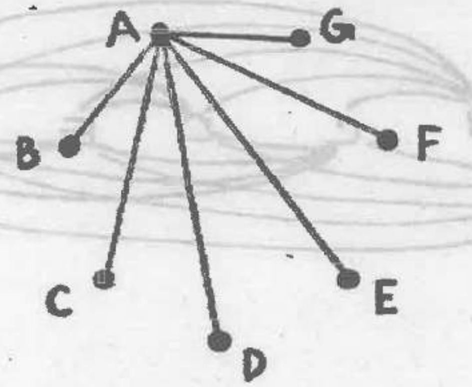


سپس، برای نشان دادن بازی بین تیم آهوها و تیم خرس‌ها، A را به B وصل می‌کنیم و برای نشان دادن بازی بین تیم آهوها و تیم روباه‌ها، A را به C وصل می‌کنیم.

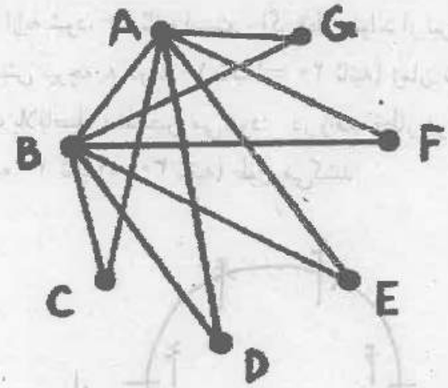
با ادامهٔ این روند، همهٔ بازی‌های تیم آهوها در مقابل سایر تیم‌ها در یک فصل مشخص می‌شود.



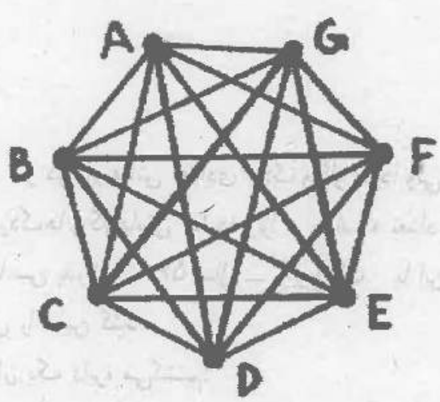
حال می‌توان با رسم خط‌های دیگر، بازی‌های تیم خرس‌ها را هم نشان داد. با توجه به این که بازی بین تیم خرس‌ها و تیم آهوها قبلاً نشان داده شده، اولین خط جدید برای نشان دادن بازی بین تیم خرس‌ها و تیم روباه‌ها از نقطهٔ B به نقطهٔ C رسم می‌شود.



به همین ترتیب، نشان دادن بازی‌های تیم خرس‌ها در مقابل تیم‌های دیگر با رسم خط‌های دیگر ادامه پیدا می‌کند.

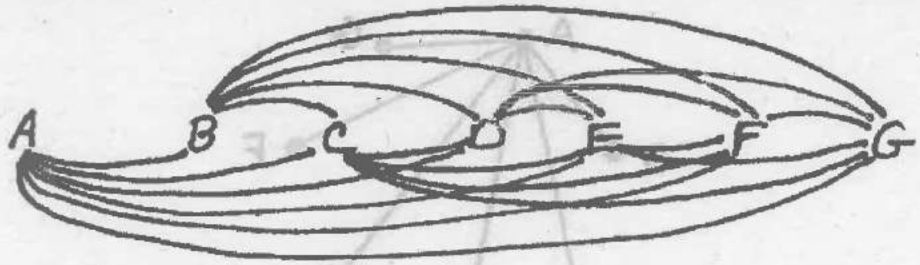


با ادامهٔ این روند، همهٔ بازی‌ها مشخص می‌شوند. توجه کنید که در هر مرحله، برای نشان دادن بازی‌ها از تیم میزبان به سایر تیم‌ها خطی رسم می‌کنیم؛ مثلاً از C به D و E و F و G وصل می‌کنیم. به این ترتیب، وقتی که به نقطهٔ G ــ که نشان‌دهندهٔ تیم شیرهاست ــ می‌رسیم، خطی برای رسم کردن باقی نمی‌ماند؛ زیرا بازی‌های تیم شیرها در مقابل بقیهٔ تیم‌ها را قبلاً نشان داده‌ایم.



با شمردن این خط‌ها مشخص می‌شود که در یک فصل، ۲۱ بازی برگزار می‌شود و برای تعیین تعداد کل بازی‌ها، کافی‌ست که ۲۱ را در ۳ ضرب کنیم؛ پس در یک دوره ۶۳ مسابقه انجام می‌شود.

توجه کنید که برای حل یک مسأله می‌توان از شکل‌های مختلف استفاده کرد؛ مثلاً، مثال فوق را می‌توانستیم با رسم شکل زیر هم حل کنیم.

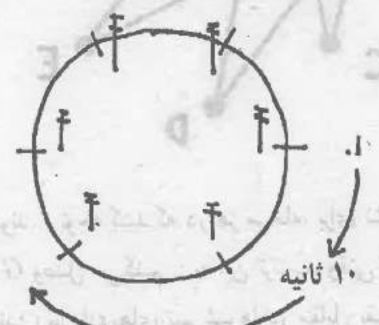


قطار اسباب‌بازی

مسیر ریل قطار اسباب‌بازی سیاوش، به شکل دایره است و شش تیرچهٔ خط ارتباط تلفن به فاصله‌های یکسان دور مسیر قرار دارند. اگر قطار ظرف ۱۰ ثانیه از تیرچهٔ اول به تیرچهٔ سوم برسد، دور زدن کل مسیر چه‌قدر طول می‌کشد؟

پاسخی ساده که ممکن است بلافاصله ارایه شود، ۲۰ ثانیه است: اگر قطار بتواند از تیرچهٔ اول تا تیرچهٔ سوم را ــ ظاهراً، نصف مسیر را ــ در ۱۰ ثانیه بپیماید، برای گذشتن از شش تیرچه به دو تا ۱۰ ثانیه(= ۲۰ ثانیه) زمان نیاز دارد؛ ولی این پاسخ نادرست است.

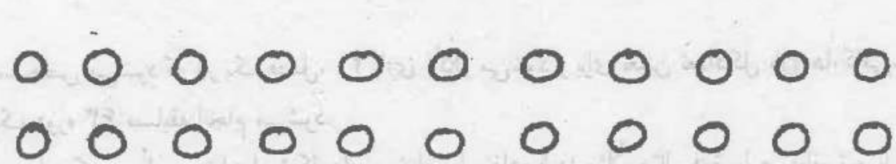
پاسخ صحیح، با توجه به نمودار مناسب بلافاصله مشخص می‌شود: در واقع، قطار در ده ثانیه یک سوم مسیر را ــ و نه نصف مسیر را ــ طی می‌کند؛ پس پیمودن کل مسیر، سه ۱۰ ثانیه(= ۳۰ ثانیه) طول می‌کشد.



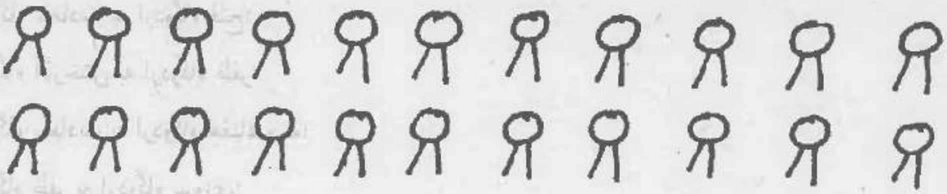
اردک‌ها و گاوها

قاسم یکی از کشاورزان لاهیجان است. او در مزرعه‌اش تعدادی اردک و گاو دارد؛ ولی به‌خاطر ندارد که از هریک از آنها چند تا دارد. در واقع، او نیازی به به‌خاطر سپردن تعداد اردک‌ها و گاوهایش ندارد؛ زیرا می‌داند که تعداد اردک‌ها و گاوها برابر سن خودش ــ ۲۲ سال ــ است و مجموع پاهای اردک‌ها و گاوها با سن پدرش ــ ۵۶ سال ــ برابر است. با این فرض که هیچ‌یک از حیوانات او نقص عضو نداشته‌باشند، تعداد اردک‌ها و تعداد گاوهایش را تعیین کنید.

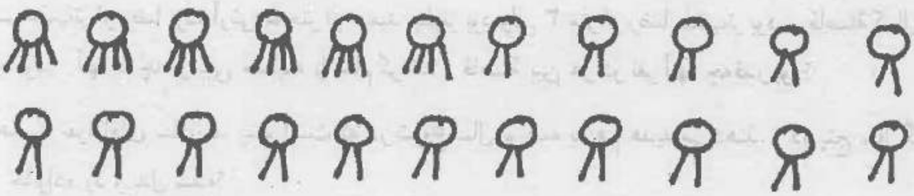
برای حل این مساله، ابتدا برای هر حیوان یک دایره می‌کشیم!



اگر همهٔ این حیوان‌ها را اردک فرض کنیم، باید برای هریک از آنها دو پا بکشیم:



به این ترتیب، ۴۴ پا به‌دست می‌آید؛ ولی تعداد پاها باید ۵۶ باشد. هر جفت از ۱۲ پای باقی مانده را به ۶ تا از اردک‌ها می‌دهیم و به گاو تبدیلشان می‌کنیم:



بنابر این، پاسخ مسأله «۶ گاو و ۱۶ اردک» است.

تمرین.

مسأله‌های زیر را با رسم شکل حل کنید.

۱) کرمی پایین یک دیوار ۱۲ متری است و می‌خواهد از دیوار بالا برود. این کرم هر روز ۳ متر به بالا می‌خزد؛ ولی هنگام شب ۲ متر به پایین لیز می‌خورد. چند روز طول می‌کشد که کرم به بالای دیوار برسد؟

۲) پریسا صندوق‌دار یکی از فروشگاه‌های زنجیره‌ای شهر است. ساختمان این فروشگاه چندین طبقه دارد و پریسا در طبقهٔ وسط آن کار می‌کند. او یک روز در پایان وقت کاریش مرخصی گرفت و مشغول خرید در فروشگاه شد: ابتدا به قسمت لوازم منزل که سه طبقه بالاتر بود رفت، بعد برای خرید از قسمت بچگانه پنج طبقه پایین آمد، سپس شش طبقه بالا رفت تا از قسمت لوازم صوتی خرید کند و بالاخره، ده طبقه پایین آمد و از در خروجی اصلی فروشگاه در طبقهٔ اول خارج شد. این فروشگاه چند طبقه دارد؟

۳) توپی را در نظر بگیرید که از هر ارتفاعی که پرت شود، نصف مسیر رفته را دوباره به بالا بر می‌گردد. این توپ، از ارتفاع ۱۶ متری پرتاب شده و در حال بالا و پایین پریدن است. کل فاصلهٔ عمودی‌ای که توپ از لحظهٔ افتادن تا لحظهٔ پنجمین برخورد با زمین طی می‌کند را حساب کنید.

۴) اگر شش نفر در جلسه‌ای با هم ملاقات کنند و دو به دو با هم دست بدهند، عمل دست دادن روی هم چند بار تکرار می‌شود؟

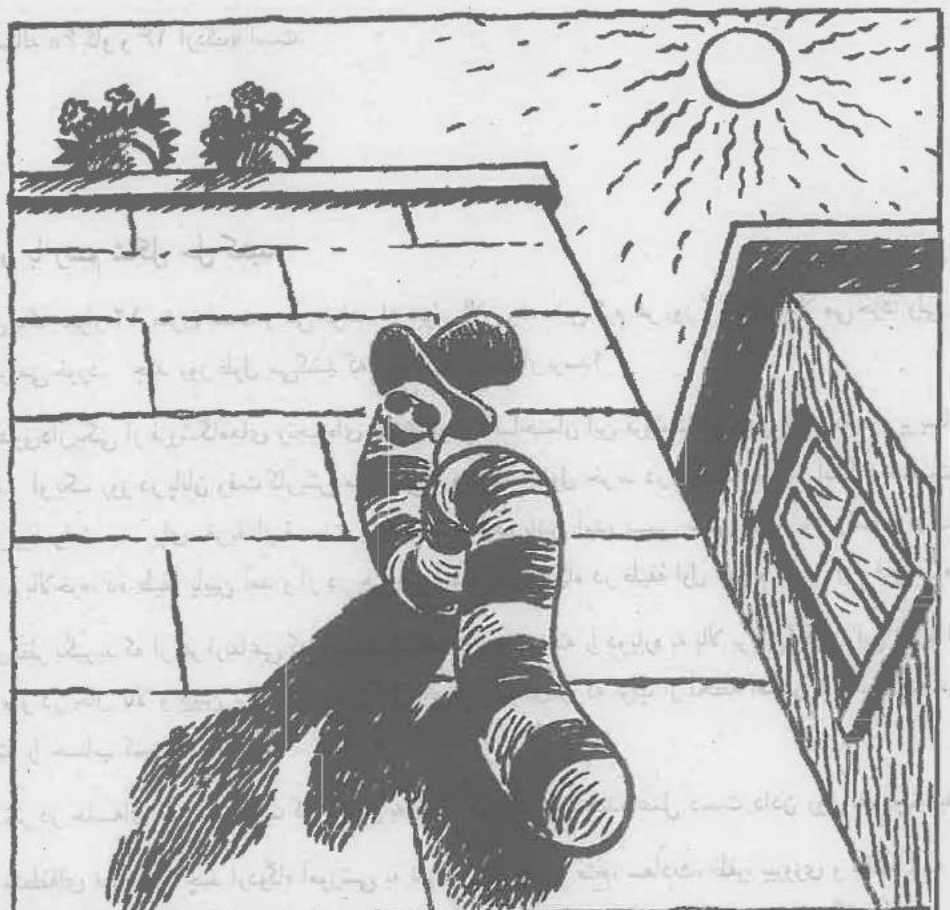
۵) ارتش در منطقه‌ای صحرایی چند اردوگاه آموزشی به نام‌های آذرخش، فتح، سعادت، ظفر، پیروزی و هفتاد و نه بر پا کرده. اردوگاه آذرخش ۱۵ کیلومتر با اردوگاه سعادت فاصله دارد، اردوگاه پیروزی در فاصلهٔ ۱۲ کیلومتری اردوگاه ظفر است، اردوگاه فتح در فاصلهٔ ۶ کیلومتری اردوگاه هفتاد و نه قرار گرفته است، اردوگاه ظفر ۳ کیلومتر از اردوگاه سعادت فاصله دارد، اردوگاه پیروزی در ۹ کیلومتری اردوگاه هفتاد و نه است، فاصلهٔ اردوگاه پیروزی تا اردوگاه سعادت ۷ کیلومتر است، اردوگاه هفتاد و نه در فاصلهٔ ۱ کیلومتری اردوگاه آذرخش است، اردوگاه فتح ۱۱ کیلومتر با اردوگاه ظفر فاصله دارد و هیچ دو اردوگاه دیگری با جادهٔ دیگری به هم مرتبط نیستند. در هریک از موارد زیر، طول کوتاه‌ترین مسیر را تعیین کنید:

- اردوگاه فتح به اردوگاه پیروزی؛
- اردوگاه ظفر به اردوگاه هفتاد و نه؛

- اردوگاه سعادت به اردوگاه فتح؛
- اردوگاه آذرخش به اردوگاه ظفر؛
- اردوگاه سعادت به اردوگاه هفتاد و نه؛
- اردوگاه ظفر به اردوگاه پیروزی؛
- اردوگاه آذرخش به اردوگاه فتح.

۶) بهمن، کمال، ابراهیم، حمید، آرش، و رضا در یک مسابقهٔ دوی ۸۰۰ متر شرکت کردند. در پایان آرش ۷ متر جلوتر از ابراهیم بود، بهمن ۱۲ متر عقب‌تر از رضا بود، آرش ۵ متر از حمید جلوتر بود ولی ۳ متر از رضا عقب‌تر بود. فاصلهٔ کمال از نفر اول و نفر آخر به یک اندازه بود. آنها با چه ترتیبی مسابقه را تمام کردند؟ فاصلهٔ بین هر دو نفر آنها چه‌قدر بود؟

۷) در خانوادهٔ هشت نفرهٔ آقای سادات، رسم است که در شروع سال نو همه به هم هدیه می‌دهند. در پنج سال گذشته چند هدیه بین اعضای این خانواده رد و بدل شده؟



نامساوی‌ها(قسمت اول)

کورش توکلی

یکی از موضوع‌هایی که در کتب درسی اشاره‌ای به آن شده ولی به تفصیل بررسی نشده، نامساوی‌ها است. در این مقاله به بررسی چند نامساوی مهم و کاربردهایی از آنها در اثبات نامساوی‌های دیگر می‌پردازیم.

با یک نامساوی ساده که با آن و اثباتش آشنایید شروع می‌کنیم:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad a, b \geq 0.$$

نامساوی فوق را می‌توان برای n عدد غیر منفی به‌صورت

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad a_1, \ldots, a_n > 0 \tag{1}$$

تعمیم داد. مقدار طرف چپ نامساوی، واسطهٔ هندسی $a_1, \ldots, a_n$ و مقدار طرف راست، واسطهٔ حسابی $a_1, \ldots, a_n$ نامیده می‌شود.

از نامساوی ۱ در اثبات بسیاری از نامساوی‌ها استفاده می‌شود. نامساوی بالا را در این مقاله ثابت نمی‌کنیم؛ ولی هر جا که لازم شد از آن استفاده می‌کنیم. ضمناً، تذکر این مطلب ضروری است که در (۱) تساوی فقط وقتی برقرار است که $a_1 = \cdots = a_n$.

برای دیدن مثالی از چگونگی به‌کار بردن نامساوی ۱، نامساوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \quad a_1, \ldots, a_n > 0. \tag{2}$$

به مقدار طرف چپ نامساوی، واسطهٔ توافقی $a_1, \ldots, a_n$ گفته می‌شود و در واقع، نامساوی فوق ادعا می‌کند که واسطهٔ توافقی n عدد مثبت از واسطهٔ هندسی آنها بیشتر نیست. برای اثبات این نامساوی، (۱) را برای اعداد $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ به‌کار می‌بریم؛ بنابراین

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

و تساوی فقط وقتی برقرار است که $\frac{1}{a_n} = \cdots = \frac{1}{a_1}$؛ یعنی $a_1 = \cdots = a_n$. در نتیجه،

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

و با معکوس کردن کسرهای دو طرف و تغییر جهت علامت نامساوی برهان تمام می‌شود.

از نامساوی فوق هم می‌توان نامساوی‌های دیگری به دست آورد؛ مثلاً

$$(a_1 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2.$$

برای اثبات، به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$(1) \Rightarrow a_1 + \cdots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n};$$

ریاضیات، شمارهٔ ۱
(اردیبهشت ۱۳۷۹) صص ۳۲ــ۳۱

$$(۲) \Rightarrow \frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}.$$

از ضرب نامساوی‌های فوق، حکممان به‌دست می‌آید.

نامساوی مهم دیگری که کاربردهای زیادی دارد، نامساوی کوشی ــ شوارتز است:

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2).$$

برای اثبات این نامساوی، عبارت درجهٔ دوم (برحسب x) $P(x)=(a_1x+b_1)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2$ را که برای هر x نامنفی است در نظر بگیرید. با بسط جمله‌ها داریم

$$P(x)=(a_1^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+\cdots+b_n^2).$$

از آنجا که برای هر x، $P(x)\geq 0$، برای عبارت درجهٔ دوم $P(x)$ باید $\Delta' \leq 0$ و در نتیجه،

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2-(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2) \leq 0$$

و به این ترتیب، نامساوی مورد نظر به‌دست می‌آید.

با استفاده از نامساوی کوشی ــ شوارتز می‌توان نامساوی مثلث را که به‌شکل

$$\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2} \geq \sqrt{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2}$$

نوشته می‌شود ثابت کرد. برای این کار، با توجه به مثبت بودن دو طرف نامساوی بالا، می‌توان دو طرف را مجذور کرد و نامساوی جدید را ثابت کرد. با به توان رساندن دو طرف و ساده کردن، همان نامساوی کوشی ــ شوارتز که قبلاً ثابت شده است به دست می‌آید.

تمرین.

۱) ثابت کنید

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

به مقدار طرف راست نامساوی، واسطهٔ مربعی $a_1,\ldots,a_n$ می‌گویند.

۲) اگر a و b و c سه عدد مثبت باشند، ثابت کنید

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 8.$$

۳) اگر $a_1+\cdots+a_n=1$، ثابت کنید $a_1^2+\cdots+a_n^2 \geq \frac{1}{n}$ (راهنمایی: از نامساوی کوشی ــ شوارتز استفاده کنید).

۴) نقطهٔ دلخواه P را درون مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر a در نظر بگیرید. اگر d_1، d_2 و d_3 فاصله‌های P تا ضلع‌های a و b و c باشند، ثابت کنید $\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3} < \sqrt{2a}$ (راهنمایی: ابتدا بنویسید $\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}=\sqrt{ad_1}\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{bd_2}\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{cd_3}\sqrt{\frac{1}{c}}$ و سپس از نامساوی کوشی ــ شوارتز استفاده کنید).

۵) اعداد مثبت $a_1,\ldots,a_n$ و $b_1,\ldots,b_n$ به گونه‌ای هستند که هرکدام از اعداد دستهٔ اول با یکی از اعداد دستهٔ دوم برابر است. ثابت کنید

$$\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

مسأله‌های درسی

در این بخش، مسأله‌هایی در زمینهٔ کتاب‌های درسی مطرح می‌شود. بعضی از آنها سرراست و ساده‌اند و برخی تا حدی چالش برانگیز. در شمارهٔ آینده، راهنمایی‌هایی برای حل بعضی از این مسأله‌ها درج می‌شود. با ارسال مسأله(که به نام خودتان درج خواهد شد) این بخش را پربارتر کنید.

- ریاضی ۱ و ۲

۱) آیا حاصل عددی گنگ به توان عددی گنگ، لزوماً گنگ است؟

۲) عبارت $x^5 + x + 1$ را تجزیه کنید.

۳) عبارت $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ را به‌صورت حاصل ضرب دو عامل تجزیه کنید، به‌طوری که یکی از آن عوامل $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ باشد.

۴) به‌ازای کدام مقدار m، دو خط به معادلات $y = -2x + 3$ و $y = -mx - 1$ روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقاطع هستند؟

- ریاضی ۳ و ۴

۱) رابطهٔ R روی مجموعهٔ اعداد حقیقی با $R = \{(x, y) \mid [|x|] + [|y|] = 1\}$ تعریف شده است. R را در صفحه رسم کنید و مساحت آن را به‌دست آورید ([ ] همان جزء صحیح است).

۲) معادلهٔ $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ را حل کنید.

۳) مقدار $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$ را به‌دست آورید.

۴) حاصل $5 + 55 + 555 + \cdots + \underbrace{5\ldots5}_{\text{تا } n}$ را به‌دست بیاورید.

- جبر و احتمال

۱) مجموعه‌ای ۱۰ عضوی از اعداد ۱ تا ۹۹ را به‌طور دلخواه در نظر بگیرید. ثابت کنید می‌توان این مجموعه را به دو زیرمجموعهٔ غیر تهی چنان افراز کرد که مجموع اعضای هر یک از دو مجموعه با هم برابر باشند.

۲) ثابت کنید که در هر مجموعهٔ ۳۳ عضوی از اعداد طبیعی که همهٔ عوامل اولشان بین اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ هستند، دو عضو متمایز وجود دارند که ضربشان مربع کامل است.

۳) باقی‌ماندهٔ تقسیم 5472^{129} را بر ۷ پیدا کنید.

۴) دو عدد حقیقی یکی از بازهٔ $[0, 3]$ و دیگری از بازهٔ $[-1, 2]$ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که مجموع این دو عدد بیش از یک باشد چقدر است؟

- حسابان ۱ و ۲

۱) اگر f تابعی صعودی باشد که برای هر x حقیقی، $f(f(x)) = f(x)$، ثابت کنید $f(x) = x$.

شمارهٔ ۱
(اردی‌بهشت ۱۳۷۹) صص ۳۲_۳۳

۲) ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin[x]$ متناوب نیست($[x]$ همان جزء صحیح x است).

۳) فرض کنید تابع حقیقی f به ازای هر عدد حقیقی تعریف شده است و برای هر $a,b\in\mathbb{R}$، $f(a+b)=f(a)+f(b)$.
ثابت کنید پیوستگی f در $x=۰$، پیوستگی f بر $\mathbb{R}$ را ایجاب می‌کند.

۴) حاصل $\lim_{x\to ۰^-} x[\frac{۱}{x}]$ را محاسبه کنید($[\frac{۱}{x}]$ همان جزء صحیح $\frac{۱}{x}$ است).

- حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲

۱) اگر $f:[۰,۱]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پیوسته روی $[۰,۱]$ و مشتق‌پذیر روی $(۰,۱)$ باشد و داشته باشیم $f(۰)=\int_۰^۱ f(t)\,dt$، ثابت کنید $۰<c<۱$ موجود است که $f'(c)=۰$.

۲) دنبالهٔ $\{x_n\}$ با $x_۰=۱$ و $x_۱=۵$ و برای $n\geq ۲$،
$$x_n=\frac{x_{n-۱}+x_{n-۲}}{۲}$$
تعریف شده. ثابت کنید که $\{x_n\}$ همگراست و حدش را بیابید.

۳) فرض کنید f تابعی پیوسته روی $[a,b]$ و مشتق‌پذیر روی (a,b) باشد و $f(a)=f(b)=۰$. ثابت کنید $a<c<b$ موجود است که $f'(c)=f(c)$.

۴) مطلوب است محاسبهٔ
$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$$

- ریاضیات گسسته

۱) اگر مرتبهٔ یک گراف کامل $\frac{۱}{۴}$ اندازهٔ آن باشد، مرتبهٔ گراف را پیدا کنید.

۲) اگر a و b دو عدد صحیح متمایز باشند، ثابت کنید نامتناهی عدد صحیح مثل x وجود دارند که $(a+x,b+x)=۱$.

۳) حاصل عبارت
$$\binom{n}{۱}+۲\binom{n}{۲}+\cdots+n\binom{n}{n}$$
را به‌دست آورید.

۴) معادلهٔ (پیمانهٔ ۵) $۲x^۹+۲x^۸+x^۴+۱\equiv ۰$ را حل کنید.

- هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

۱) اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۵\\۰&۲\end{bmatrix}$، ماتریس P را چنان بیابید که $P^{-۱}AP=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۲\end{bmatrix}$ و $A^{۱۳۷۹}$ را حساب کنید.

۲) وارون‌پذیری
$$\begin{bmatrix}۱۳۷۷&۱۳۷۹&۲۰۰۱\\۱۳۷۸&۱۹۹۹&۱۴۲۱\\۲۰۰۰&۱۴۲۰&۱۴۱۹\end{bmatrix}$$
را بررسی کنید.

۳) اگر A و B دو ماتریس باشند و $AB=۳A+۴B$ ثابت کنید $AB=BA$.

۴) حرکتی هندسی در صفحه در نظر می‌گیریم که نقطهٔ (x,y) را به نقطهٔ $(x-y,x+y)$ ببرد. اگر این حرکت را ۳۶۰ بار به‌طور متوالی روی نقطه‌ای به فاصلهٔ $۲^{-۱۸۰}$ از مبدأ انجام دهیم، نقطهٔ نهایی در چه فاصله‌ای از مبدأ قرار دارد؟

دو بازی فکری

یحیی تابش

بازی‌ها، اغلب سرچشمهٔ جوشش خلاقیت هستند و تدوین استراتژی برد به ریاضیات ویژه‌ای نیاز دارد. در این بخش، تلاش می‌شود که با ارایهٔ بازی‌هایی با جنبهٔ خلاقانه، با اصول ریاضی نظریهٔ بازی‌ها هم آشنا شویم. علاوه بر این، تجربه‌هایی از بعضی از مفاهیم ریاضی را نیز در این بخش ذکر می‌کنیم.

کبریت‌بازی

علی و احمد مشغول کبریت‌بازی هستند: هر کدام بسته‌ای کبریت در اختیار دارند و در هر مرحله، می‌توانند ۱، ۲ و یا ۳ چوب کبریت را وسط بگذارند؛ کسی که به حاصل‌جمع ۲۴ برسد برنده است. علی چه کار کند که حتماً برنده شود؟

هر بازی‌کن می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ چوب کبریت را وسط بگذارد. اگر علی بازی را شروع کند و سه چوب کبریت بگذارد، احمد می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ چوب کبریت اضافه‌کند که حاصل‌جمع ۴، ۵ یا ۶ می‌شود. دوباره نوبت علی می‌شود و هرکس که مجموع چوب کبریت‌ها را به ۲۴ برساند برنده است.

استراتژی برد را می‌توان با بررسی عقب روندهٔ مسأله پیدا کرد: اگر ۲۱، ۲۲ یا ۲۳ چوب کبریت وسط باشد، علی می‌تواند با اضافه کردن (به ترتیب) ۳، ۲ و یا ۱ چوب کبریت برنده شود. با کمی دقت، علی متوجه می‌شود که اگر به ۲۰ چوب کبریت برسد، به راحتی برنده می‌شود؛ پس هدف علی می‌تواند رسیدن به ۲۰ چوب کبریت باشد و این وقتی ممکن است که در دور قبل، ۱۷، ۱۸ یا ۱۹ چوب کبریت جمع شده باشد و این هنگامی میسر می‌شود که در دور قبل آن، علی جمع چوب کبریت‌ها را به ۱۶ رسانده باشد. با ادامهٔ بررسی به همین ترتیب، می‌بینیم که علی باید به ۱۲، ۸ و بالاخره ۴ چوب کبریت در دورهای قبلی بازی برسد.

با بررسی استراتژی بالا، می‌بینیم که استراتژی برد برای علی این است که به حاصل‌جمع ۴ چوب کبریت برسد و سپس در دورهای بعدی به ۸، ۱۲، ۱۶، ۲۰ و بالاخره ۲۴ که برنده می‌شود. برای این کار، علی باید دومین بازی‌کن باشد.

مسأله را می‌شد این طور هم مطرح کرد که هر کس به حاصل‌جمع ۲۴ برسد بازنده است. در این صورت استراتژی برد چگونه خواهد بود؟

بازی شش‌گوشه

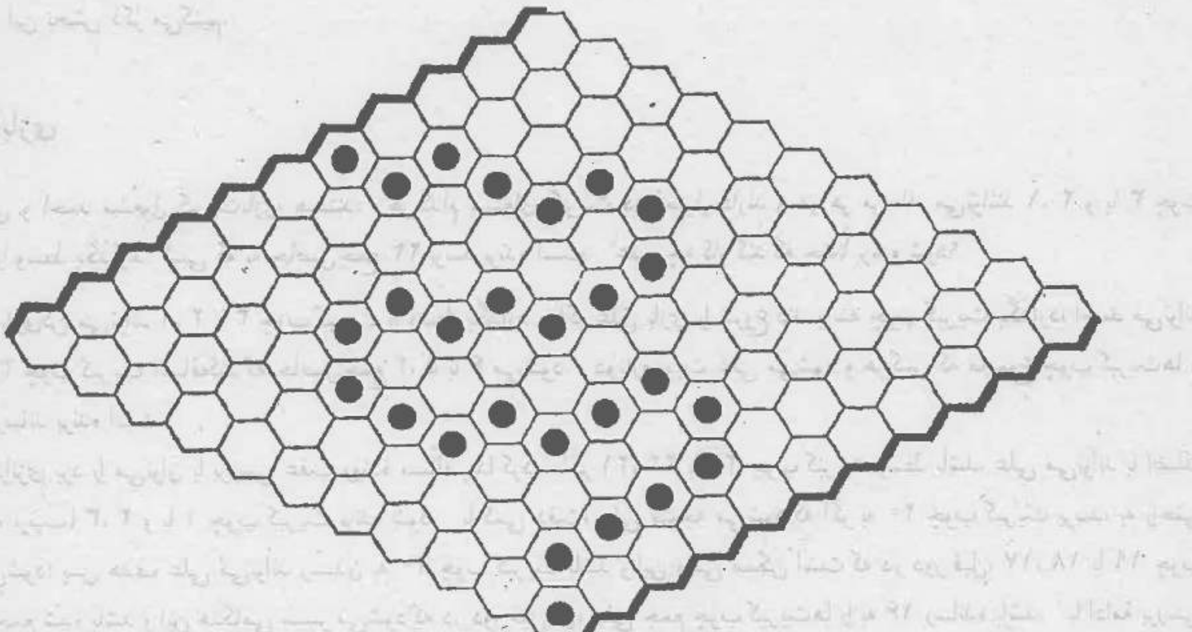
وسایل لازم

- یک صفحهٔ یازده در یازده خانه به طول تقریبی پنجاه سانتی‌متر متشکل از شش‌ضلعی‌ها (مطابق شکل)؛
- پنجاه مهرهٔ سیاه به قطر سه سانتی‌متر؛
- پنجاه مهرهٔ سفید به قطر سه سانتی‌متر.

شمارهٔ ۱
(اردیبهشت ۱۳۷۹) صص ۳۶ـ۳۵

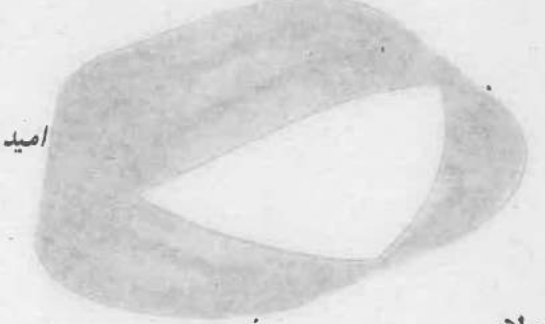
شرح بازی

بازی شش گوشه یک بازی دو نفره است و هدف هر بازی‌کن در این بازی، ساختن مسیری از مهره‌های سیاه(یا سفید) از مرز سیاه(یا سفید) به مرز سیاه(یا سفید) مقابل است. بازی، توسط یکی از طرفین آغاز می‌شود. پس از این که بازی‌کن دیگر هم مهرهٔ خود را در یکی از خانه‌های مرز هم‌رنگ مهره قرار داد، بازی‌کن اول مهرهٔ بعدی خود را در یکی از خانه‌هایی که با خانهٔ انتخابی قبلی ضلع مشترک داشته باشد قرار می‌دهد. بازی‌کن دوم هم در نوبت خود به همین نحو عمل کرده و بازی به همین منوال ادامه می‌یابد. در جریان بازی، هر یک از رنگ‌ها می‌تواند راه دیگری را سد کند و در این صورت، بازی‌کنی که راهش سد شده باید راه دیگری پیدا کند. هر یک از بازی‌کن‌ها می‌توانند گوشه‌های صفحه را اشغال کنند.

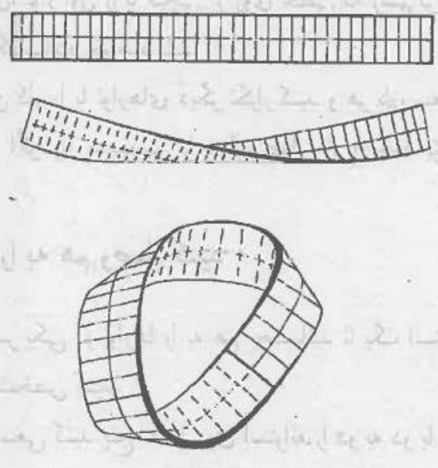


نوار موبیوس بسازیم

امید نقشینه ارجمند



مواد لازم



قبل از مطالعهٔ این قسمت، وسایل زیر را تهیه کنید:

۱) چند نوار کاغذی؛

۲) نوار چسب؛

۳) قیچی؛

۴) خط‌کش؛

۵) مداد یا خودکار.

نوار موبیوس بسازید

یکی از نوارها را بردارید و یکی از دو سر نوار را نیم دور بتابانید و دو سر نوار را با چسب به هم بچسبانید. آنچه ساخته‌اید، «رویه»ای است که به آن نوار موبیوس می‌گویند. هدف ما، بررسی بعضی از خواص این رویه است و از جمله، بعضی تفاوت‌هایش با استوانه را خواهیم دید.

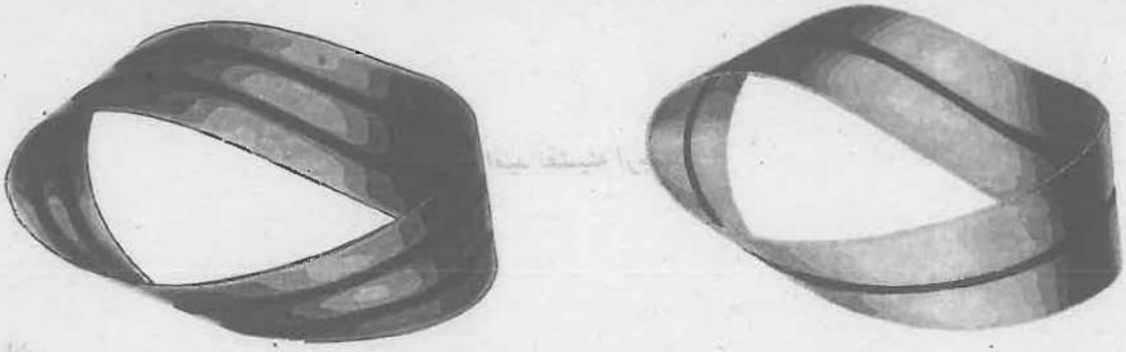
یک بررسی سطحی

استوانه‌ای را در ذهن مجسم کنید(اگر این کار سخت است، یکی بسازید). استوانه، رویه‌ای دوطرفه است و برای رفتن از یک طرف به طرف دیگر آن، لازم است از «لبه» عبور کنید. لبهٔ استوانه، دو تکه است و هر تکه یک دایره است.

آیا نوار موبیوس هم از این جهات مثل استوانه است؟ آیا نوار موبیوس دو طرف دارد؟ لبهٔ نوار موبیوس چند تکه است؟

نوار موبیوس را بُبرید

مثل بالا چند نوار موبیوس بسازید؛ ولی قبل از چسباندن دو سر نوارهای کاغذی، اولی را با کشیدن خطی طولی در هر دو طرف به دو قسمت تقسیم کنید. به همین ترتیب، روی دومی دو خط و روی سومی سه خط بکشید(اگر دوست دارید، چند نوار دیگر هم درست کنید).



اکنون، نوار اول را با قیچی از روی خطی که رسم کرده‌اید، ببُرید. حدس بزنید که چه اتفاقی خواهد افتاد. به احتمال زیاد، در اولین تجربه شگفت‌زده خواهید شد.

همین کار را با نوارهای دیگر تکرار کنید و هر بار، سعی کنید حدس بزنید که با چه چیزی مواجه خواهید شد.

پرسش. اگر نوار موبیوسی را به‌طور طولی از n خط ببُریم، چه چیزی به‌وجود خواهد آمد؟ جواب خود را با تجربه محک بزنید.

نقطه‌ها را به هم وصل کنید

۱. دو سر یکی از نوارها را به هم بچسبانید تا یک استوانه داشته باشید. پنج نقطه را روی استوانه و پنج نقطه را روی نوار موبیوس با علامت مشخص کنید.

ابتدا سعی کنید پنج نقطهٔ روی استوانه را دو به دو با مسیرهایی که یکدیگر را قطع نمی‌کنند به هم وصل کنید. اجازه دهید آب پاکی را روی سر شما(!) بریزم: تلاشتان بی‌فایده خواهد بود.

حال، سعی کنید همین کار را روی نوار موبیوس انجام دهید. استثنائاً، این بار خواستن توانستن است. پس از انجام این کار، نقطه‌ها را به شش نقطه افزایش دهید. این‌بار هم موفق خواهید شد؛ ولی تلاشتان در مورد هفت نقطه، مشمول همان «آب پاک» خواهد شد!

۲. باز یک استوانه و یک نوار موبیوس بردارید، روی هرکدام شش نقطه مشخص کنید و نقطه‌ها را با اعداد ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کنید. حال، سعی کنید طوری نقطه‌های زوج را به نقطه‌های فرد وصل کنید که مسیرهای رسم شده، یکدیگر را قطع نکنند. این کار روی استوانه ممکن نیست؛ ولی روی نوار موبیوس ممکن است.

پرسش. آیا انجام این کار برای هفت نقطه روی نوار موبیوس ممکن است؟

نشاندن گراف‌ها روی رویه‌ها

فرض‌کنید که G، یک گراف باشد و M یک رویه[1]. می‌گوییم گراف G روی رویهٔ M می‌نشیند اگر بتوان G را طوری روی M رسم کرد که یال‌هایش یکدیگر را قطع نکنند.

فرض‌کنید که G، یک گراف باشد و نشان دهید که «الف» و «ب» و «ج» معادلند و «د» را نتیجه می‌دهند:

الف) G روی صفحه می‌نشیند؛

ب) G روی استوانه می‌نشیند؛

ج) G روی کره می‌نشیند؛

د) G روی نوار موبیوس می‌نشیند.

---

۱) «رویه»، چیزی است از قماش صفحه، استوانه، سطح یک توپ و یا سطح خارجی لاستیک ماشین.

آمادگی برای المپیاد

هادی سلماسیان

۱. تقریباً برای همهٔ ما، اولین مواجهه با ریاضیات برخورد با دو مفهوم عدد و شمردن بوده و شاید به همین دلیل است که اعداد را خیلی خوب می‌شناسیم. به‌ویژه، آشناترین نوع اعداد همان اعضای مجموعهٔ اعداد صحیح هستند که عمدتاً به صورت $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ نمایشش می‌دهیم. بد نیست برای شروع کار، چند تعریف را یادآوری کنم؛ گر چه حتی برخی از آنها را در دبستان آموخته‌اید!

برای دو عدد صحیح a و b، می‌گوییم a بر b بخش‌پذیر است و می‌نویسیم $a|b$ هرگاه عدد صحیح c پیدا شود که $a = b \cdot c$. در این وضع، b را مقسوم‌علیه a می‌نامیم. گزاره‌های زیر، احتمالاً برایتان آشنایند؛ به هر حال، ثابت‌کردنشان هم کار ساده‌ای است.

گزاره ۱. *برای هر عدد صحیح a، $a|a$.*

گزاره ۲. *برای هر عدد صحیح a، $a|0$ و $1|a$.*

گزاره ۳. *برای هر سه عدد صحیح a و b و c، اگر $a|b$ و $b|c$ آنگاه $a|c$.*

گزاره ۴. *اگر a و b دو عدد صحیح باشند که $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.*

گزاره ۵. *اگر a و b و c سه عدد صحیح باشند که $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|b \pm c$.*

ساده‌ترین عددهای صحیح از نظر وضعیت مقسوم‌علیه‌ها، اعداد اول هستند. عدد صحیح p را اول می‌گوییم هرگاه $p > 1$ و p جز یک و خودش مقسوم‌علیه مثبت دیگری نداشته‌باشد. هر عدد صحیح بزرگ‌تر از یک که اول نباشد، مرکب نامیده‌می‌شود.

تمرین ۱ *ثابت‌کنید هر عدد صحیح بزرگ‌تر از یک، مقسوم‌علیهی اول دارد.*

اولین سؤالی که در مورد اعداد اول مطرح می‌شود این‌است: چند تا عدد اول وجود دارد؟ خوشبختانه، پاسخ این مسأله از زمان اقلیدس برای ما به یادگار مانده‌است:

گزاره ۶. *بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.*

برهان. فرض‌کنید تنها تعداد متناهی عدد اول مثل $p_1, \ldots, p_n$ وجود داشته‌باشند و عدد $N = p_1 \cdots p_n + 1$ را درنظر بگیرید. روشن‌است که N صحیح است و $N > 1$، ولی بر هیچ‌یک از $p_1, \ldots, p_n$ بخش‌پذیر نیست؛ زیرا اگر مثلاً برای یک $1 \leq i \leq n$ داشته‌باشیم $p_i|N$، چون $p_i|p_1 \cdots p_n$ آنگاه $p_i|N - (p_1 \cdots p_n)$؛ یعنی $p_i|1$ و در نتیجه $p_i \leq 1$ که تناقض است.

دقت‌کنید که طبق تمرین ۱، N باید دارای مقسوم‌علیه اولی باشد، پس باید بر یکی از اعداد $p_1, \ldots, p_n$ بخش‌پذیر باشد که طبق استدلال بالا می‌دانیم که ممکن نیست؛ پس این فرض که تنها تعداد متناهی عدد اول وجود دارند نمی‌تواند درست باشد. ■

تمرین ۲ *ثابت‌کنید هر عدد صحیح بزرگ‌تر از یک را می‌توان به‌صورت ضربی از اعداد اول نمایش داد.*

بررسی این که فقط یک عدد اول زوج وجود دارد ساده‌است: هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲، به‌صورت $2m$ است که $m > 1$! پس بی‌نهایت از عددهای اول فردند. به بیان دیگر، بی‌نهایت عدد اول وجود دارند که به‌صورت $2m + 1$ ــ که m عددی صحیح و مثبت

شمارهٔ ۱
(اردی‌بهشت ۱۳۷۹) صص ۴۱ــ۳۹

است ــ قابل بیان هستند. اگر به‌جای ۲، ۳ یا عدد صحیح مثبت دیگری قرار دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟ مثلاً آیا بی‌نهایت عدد اول وجود دارند که به‌صورت $۳m + ۱$ که m عددی صحیح و مثبت است قابل بیان باشند؟ گزارهٔ زیر اولین روزنهٔ امید است:

گزاره ۷. *بی‌نهایت عدد اول وجود دارند که به‌صورت $۳m - ۱$ ــ که m عددی صحیح و مثبت است ــ قابل بیان هستند.*

برهان. در حقیقت همان استدلال نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول را با قدری دست‌کاری به‌کار می‌بریم: فرض‌کنید تنها تعدادی متناهی عدد اول وجود دارند که به‌صورت $۳m - ۱$ هستند و آنها را $p_۱, \ldots, p_n$ بگیرید. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که $N = ۳p_۱ \cdots p_n - ۱$ بر هیچ‌یک از آنها بخش‌پذیر نیست. اکنون نشان می‌دهیم که N باید مقسوم‌علیه اولی به‌صورت $۳m - ۱$ داشته‌باشد و به این طریق، به آنچه می‌خواهیم ــ یعنی تناقض ــ می‌رسیم: طبق تمرین ۲ می‌دانیم که N را می‌توان به‌صورت ضربی از اعداد اول نمایش داد؛ یعنی $N = q_۱ \cdots q_r$ که q_i ها اول هستند. چون به‌سادگی دیده می‌شود که $۲ \not| N$ ، پس هیچ‌یک از q_i ها ۳ نیست. به‌علاوه، دقت کنید که هر عدد صحیح مثبت که بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، به یکی از دو شکل $۳k + ۱$ یا $۳k - ۱$(که k عددی صحیح است) قابل بیان است. اکنون، چون q_i ها به‌صورت $۳m - ۱$ نیستند، برای هر $۱ \leq i \leq r$ عدد m_i هست که $q_i = ۳m_i + ۱$. با توجه به رابطهٔ $(۳t + ۱)(۳s + ۱) = ۳(۳ts + t + s) + ۱$، می‌توان نشان داد که اگر X و Y دو عدد صحیح باشند طوری‌که اعداد صحیح m_X و m_Y پیدا شوند که $X = ۳m_X + ۱$ و $Y = ۳m_Y + ۱$ آنگاه عدد صحیح m_{XY} هم یافت می‌شود که $XY = ۳m_{XY} + ۱$. بنا بر این، عدد صحیح m_N هم هست که $N = ۳m_N + ۱$. ولی دقت کنید که $N = ۳q_۱ \cdots q_r - ۱$، پس $۲ = ۳(q_۱ \cdots q_r - m_N)$؛ یعنی $۳|۲$ که ممکن نیست. ■

تمرین ۳ *ثابت کنید بینهایت عدد اول وجود دارند که به‌صورت $۴m - ۱$، m صحیح و مثبت، قابل نمایش هستند.*

در آینده، این مسأله را بیشتر بررسی می‌کنیم.

در انتها، اجازه دهید گزارهٔ مهم دیگری را ــ که البته برهانش را در خیلی از کتاب‌ها(از جمله مراجع [۱] و [۲]) می‌توان یافت ــ در قالب تمرینی به شما معرفی کنم و وقتتان را به‌خاطر اثباتش تلف نکنم.

تمرین ۴ *ثابت کنید نمایش هر عدد صحیح مثبت N به اعداد اول، در حد جابه‌جایی عامل‌ها یکتاست.*

۲. چند صفر در سمت راست نمایش ده‌دهی عدد !۱۳۷۸ وجود دارد؟ راهی بهتر از ضرب اعداد و «مشاهده» هم وجود دارد! می‌دانیم وجود دقیقاً t صفر، معادل این است که $۱۰^t | ۱۳۷۸!$ ولی $۱۰^{t+۱} \not| ۱۳۷۸!$. اکنون بیایید سعی کنیم این توان را محاسبه‌کنیم. برای هر عدد صحیح مثبت N و هر عدد اول p، $e_p(N)$ را مساوی بزرگ‌ترین عدد صحیح نامنفی r قرار می‌دهیم که $p^r | N$. به‌سادگی می‌توان دریافت که چون $۵ \times ۲ = ۱۰$، پس $t = \min\{e_۲(۱۳۷۸!), e_۵(۱۳۷۸!)\}$. گزارهٔ زیر، رابطه‌ای برای محاسبهٔ $e_p(n!)$ ارائه می‌کند که منسوب به لُژاندر است:

گزاره ۸. *برای هر عدد اول p و هر عدد صحیح مثبت n داریم*

$$e_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^۲}\right] + \cdots$$

که در آن، $[x]$، همان جزء صحیح x است.

بد نیست پیش از اثبات یادآوری کنم که در حقیقت، در مجموع بالا تنها تعدادی متناهی جملهٔ ناصفر وجود دارد؛ زیرا اگر عدد صحیح مثبت s به قدر کافی بزرگ انتخاب شود آنگاه $۰ < n < p^s$؛ یعنی $\left[\frac{n}{p^s}\right] = ۰$.

برهان. می‌دانیم که $n! = ۱ \times \cdots \times n$. بیایید ببینیم چه تعدادی از عددهای بین $۱, \ldots, n$ برای یک r ثابت بر p^r بخش‌پذیرند: روشن است که اعداد مطلوب ما به‌شکل $p^r \cdot k$ هستند که k عددی صحیح و مثبت است. ولی $p^r \cdot k \leq n$؛ یعنی $k \leq \frac{n}{p^r}$ و چون k صحیح است، $k \leq \left[\frac{n}{p^r}\right]$. به‌علاوه، همهٔ مقدارهای $۱ \leq k \leq \left[\frac{n}{p^r}\right]$ هم پذیرفتنی هستند؛ یعنی درست $\left[\frac{n}{p^r}\right]$ عدد از اعداد بین

۱، ...، n بر p^r بخش‌پذیر هستند. بنا بر این، تعداد عددهای بین ۱، ...، n که بر p^r بخش‌پذیرند ولی بر p^{r+1} بخش‌پذیر نیستند برابر $\left[\frac{n}{p^r}\right] - \left[\frac{n}{p^{r+1}}\right]$ است. حالا تقریباً روشن است که

$$e_p(n) = \left(\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p^2}\right]\right) + 2\left(\left[\frac{n}{p^2}\right] - \left[\frac{n}{p^3}\right]\right) + 3\left(\left[\frac{n}{p^3}\right] - \left[\frac{n}{p^4}\right]\right) + \cdots$$

$$= \left[\frac{n}{p}\right] + \left(-\left[\frac{n}{p^2}\right] + 2\left[\frac{n}{p^2}\right]\right) + \left(-2\left[\frac{n}{p^3}\right] + 3\left[\frac{n}{p^3}\right]\right) + \cdots$$

$$= \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

■

حالا دیگر محاسبهٔ تعداد صفرهای سمت راست، یعنی t، کار سختی نیست. طبق رابطه‌ای که برای محاسبهٔ $e_p(n!)$ به‌دست آمد، روشن است که $e_2(n!) \ge e_5(n!)$ و در نتیجه $t = e_5(1378!)$؛ یعنی

$$t = \left[\frac{1378}{5}\right] + \left[\frac{1378}{25}\right] + \left[\frac{1378}{125}\right] + \left[\frac{1378}{625}\right] + 0 + 0 + \cdots$$

(زیرا $1378 < 5^5$!)؛ یعنی $t = 343$.

محاسبهٔ اخیر نسبتاً ساده بود؛ ولی روش کارآمدتری هم وجود دارد که آن را در قالب تمرین دیگری، به خودتان واگذار می‌کنم:

تمرین ۵ برای هر عدد صحیح و مثبت n و هر عدد اول p، $\nu_p(n)$ را مساوی مجموع رقم‌های نمایش n در مبنای p تعریف کنید و ثابت کنید

$$e_p(n!) = \frac{n - \nu_p(n)}{p - 1}.$$

مسأله‌ای از چهلمین المپیاد ریاضی

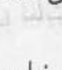
مازیار منیررحیمی

شاید کاری که می‌خواهیم انجام دهیم، کمی عجیب و تازه به نظر بیاید: می‌خواهیم یکی از مسایل چهلمین المپیاد جهانی ریاضی را بیان کنیم و به بحث در مورد آن بپردازیم. اول از همه صورت سؤال را بیان می‌کنیم:

مسأله. فرض کنید یک صفحهٔ مشبک $2n \times 2n$ (n عدد طبیعی) داریم. مهره‌هایی با این خاصیت داریم که هر مهره، خانه‌های مجاور (یعنی خانه‌هایی که با خانهٔ مورد نظر یک ضلع مشترک دارند) را تهدید نمی‌کند. به این نکته توجه کنید که یک مهره، خانهٔ خود را تهدید نمی‌کند. حداقل تعداد مهره‌های لازم را بیابید که اگر در خانه‌های این صفحهٔ $2n \times 2n$ قرار بگیرند، کلیهٔ خانه‌های این صفحهٔ مشبک تهدید شوند.

قبل از بحث در مورد راه‌های حل این مسأله، فکر می‌کنم بهتر باشد که نیم ساعت تا یک ساعت(یا حتی بیشتر) به مسأله فکر کنید؛ چون در این صورت یا خودتان مسأله را حل می‌کنید و یا موقع خواندن راه حل، متوجه اشکال‌های کارتان می‌شوید و می‌فهمید که کدام راه‌حلتان احتمالاً به نتیجه می‌رسیده است و توجیهی برای شیوهٔ یافتن راه حل‌های ارایه شده پیدا می‌کنید.

حال به ایده‌های اولیه‌ای که ممکن است در برخورد با چنین مسأله‌ای در ذهنمان پیش بیاید می‌اندیشیم. واقعاً به نظر شما چه کاری می‌تواند مفید باشد؟ شاید ایده‌های مختلفی به ذهن برسد؛ ولی من پیشنهاد می‌کنم قبل از هر کاری سعی کنید جواب مسأله را حدس بزنید، یعنی مثلاً برای n های کوچک سعی کنید این کمترین تعداد مهره‌ها را بیابید.

مثلاً، برای حالت $n = 1$ این مقدار ۲ است؛ چون اگر خانه‌ای در  را علامت بزنیم، هیچ خانه‌ای خود خانهٔ علامت خورده را تهدید نمی‌کند؛ ولی  خواص مورد نظر را دارد.

برای $n = 2$(یعنی در صفحهٔ 4×4) می‌توان دید که این مقدار ۶ است؛ زیرا

		•	
•		•	
•			
		•	•

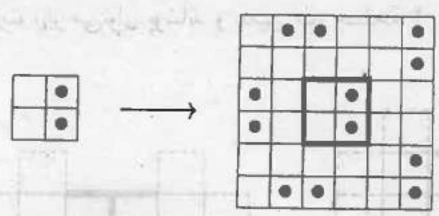
شرایط مسأله را دارد و با کمی کلنجار رفتن، می‌توان حدس زد که کمتر از ۶ علامت مشکلی را حل نمی‌کند(این، روشی کلی است که معمولاً همهٔ افراد به طور ناخودآگاه برای حدس زدن حل مسأله از آن استفاده می‌کنند). فکر نکنید که این حدس زدن کار ساده‌ای است: به نظرم، در برخی از مسایل ــ از جمله این مسأله ــ حدس زدن پاسخ، نصف راه حل به حساب می‌آید. با کمی کلنجار رفتن احتمالاً حدس خواهید زد که جواب، $n \times (n+1)$ است.

حال اگر تا کنون مسأله را حل نکرده‌اید، کمی هم با داشتن جواب به مسأله فکر کنید. احتمال زیادی وجود دارد که به جواب برسید. کاری که کلاً باید انجام دهیم، این است که نشان دهیم حداقل $n \times (n+1)$ علامت لازم است و همچنین روشی کلی بگوییم که با این تعداد علامت، شرایط مسأله برقرار شود.

ریاضیات شمارهٔ ۱
(اردیبهشت ۱۳۷۹) صص ۴۵ــ۴۲

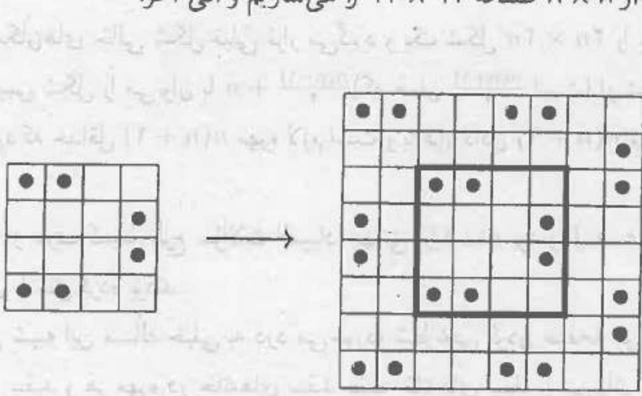
من این مسأله را به یکی از آشنایان که تا حدودی در کار مسأله حل کردن است دادم و از او راه حلی خواستم. او راه حلی برای قسمت اول، یعنی نشان دادن این موضوع که حداقل $n \times (n+1)$ علامت لازم است ارایه داد که البته این راه حل اشکال‌هایی دارد؛ ولی ما با همین راه حل سعی می‌کنیم قسمت دوم را هم نشان دهیم. او گفت: از استقرا استفاده می‌کنیم و از صفحهٔ $2n \times 2n$، صفحهٔ $(2n+4) \times (2n+4)$ را می‌سازیم. صفحهٔ $(2n+4) \times (2n+4)$ را در نظر می‌گیریم. دو سطر اول و دو سطر آخر و دو ستون اول و دو ستون آخر را در نظر گرفته و جدا می‌کنیم؛ یک صفحهٔ $2n \times 2n$ باقی می‌ماند. حال تعداد خانه‌های ردیف‌های آخر(سطر اول و سطر آخر و ستون اول و ستون آخر) روی هم $8n+12$ تا است و هر مهره حداکثر دو خانه از این $8n+12$ خانه را تهدید می‌کند و برای مربع $2n \times 2n$ داخلی هم که طبق فرض استقرا حداقل $n \times (n+1)$ مهره لازم است؛ پس روی هم حداقل $n(n+1)+4n+6$ مهره نیاز داریم که این برابر است با $n(n+1)+4n+6 = n^2+5n+6 = (n+3)(n+2)$.

احتمالاً شما هم به اشکال این اثبات پی‌برده‌اید: در مورد خانه‌های ردیف‌های دوم صحبتی نکردیم؛ چون ممکن است مهره‌ای را در یک خانهٔ ردیف دوم بگذاریم، این مهره هم خانه‌ای از ردیف اول را تهدید می‌کند و هم خانه ای از صفحهٔ $2n \times 2n$ وسط را و کارهایی که کرده‌ایم به مشکل برمی‌خورد. البته به‌نظر نمی‌رسد که این اشتباه رفع نشدنی باشد؛ یعنی احتمالاً با کمی «ور رفتن» بشود اشکال آن را رفع کرد. اما یک مسأله حل کن حرفه‌ای، استفادهٔ بهتری می‌برد: شکست قبلی را به فراموشی سپرده و به این فکر می‌افتد که از این روش، الگوریتمی برای پر کردن صفحهٔ مورد نظر بیابد. این الگوریتم هم استقرایی است. همان طور که قبلاً دیدیم، روشی برای چیدن مهره‌ها در صفحهٔ 2×2 داریم و می‌خواهیم از آن برای یافتن الگوریتمی برای چیدن مهره‌ها در صفحهٔ 6×6 استفاده کنیم.



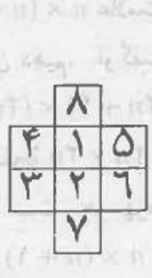
روشی را در نظر می‌گیریم که در آن، هر یک از خانه‌های ردیف‌های آخر دقیقاً یک بار تهدید می‌شود و در عین حال خانه‌های ردیف‌های دوم که توسط صفحهٔ 2×2 تهدید نمی‌شوند هم توسط مهره‌های جدید تهدید می‌شوند. دقیقاً به همین صورت، صفحهٔ 10×10 را از صفحهٔ 6×6 نتیجه می‌گیریم و الی آخر.

این الگوریتم درست کار می‌کند و فقط باید آن را دقیق و به زبان ریاضی یا با توضیحات کافی نوشت که‌از ما از آن صرف نظر می‌کنیم. فقط دراینجا باید موضوع را برای صفحهٔ $4k \times 4k$ هم بررسی کرد. برای صفحهٔ 4×4، صفحه را به شکلی پر می‌کنیم و بعد 8×8 را از آن نتیجه می‌گیریم و همین طور از 8×8 صفحهٔ 12×12 را می‌سازیم و الی آخر.



می‌بینید که چقدر ساده، توانستیم از اثباتی مرده و مشکل‌دار نتیجه‌ای ارزشمند و لازم به دست آوریم. برای این کار، فقط کمی خبرگی لازم است و کمی حواس جمع.

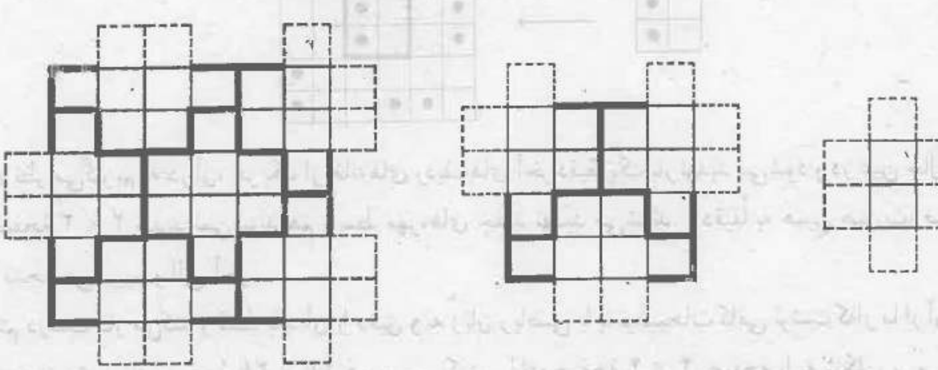
حال به راه حل دیگری می‌پردازیم که شاید راحت‌تر از راه حل بعدی به فکر برسد: نشان می‌دهیم که می‌توان صفحهٔ $۲n \times ۲n$ را با شکل‌هایی مثل



پوشاند به‌طوری که این اشکال با هم اشتراکی نداشته باشند. ممکن است قسمتی از این اشکال بیرون صفحه قرار بگیرد؛ ولی دو خانهٔ ۱ و ۲ حتماً داخل صفحه قرار می‌گیرند.

شاید بپرسید چنین شکلی چگونه به‌دست آمده است و اصلاً چه لزومی داشت این شکل را در نظر بگیریم. این چندان دور از ذهن نیست: حتماً متوجه شده‌اید که هنگام چیدن مهره‌ها در صفحه، مهره‌ها به صورت بلوک‌های دو تایی‌ای کنار هم چیده شده‌اند که اطرافشان هیچ مهرهٔ دیگری قرار ندارد (البته «تا حدودی» واضح است). خوب، حالا اگر دو خانهٔ ۱ و ۲ را در شکلمان در نظر بگیریم، این دو خانه توسط خانه‌های بیرون از شکل نمی‌توانند تهدید شوند و هیچ خانه‌ای از شکل هم هر دو خانه را با هم تهدید نمی‌کند و حداقل دو مهره برای تهدید شدن این خانه‌ها باید در شکل قرار بگیرد؛ پس در نظر گرفتن این شکل چندان هم دور از ذهن نیست. حالا کافی‌ست نشان دهیم که صفحهٔ $۲n \times ۲n$ را می‌توان با $\frac{n(n+۱)}{۲}$ تا از این شکل‌ها به صورت گفته‌شده پوشاند. مزیت این راه حل، این است که هر دو قسمت را با هم نشان می‌دهد؛ یعنی هم روشی پیدا می‌شود و هم نشان داده می‌شود که حداقل $n(n+۱)$ مهره لازم است.

صفحهٔ ۲×۲ را با یک شکل به صورت زیر می‌توان پوشاند و همین طور صفحهٔ ۴×۴ و ۶×۶ را:



در هر مرحله، n شکل در مکان‌های خالی شکل قبلی قرار می‌گیرد و یک شکل $۲n \times ۲n$ را پر می‌کند(این را می‌توانید با استقرا به طور کامل و دقیق نشان دهید)؛ پس شکل را می‌توان با $n + \frac{n(n-۱)}{۲}$(که همان $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است) از شکل‌های مورد نظر پر کرد.

به این ترتیب مشاهده می‌شود که حداقل $n(n+۱)$ مهره لازم است و با قرار دادن $n(n+۱)$ مهره در خانه‌های ۱ و ۲ این شکل‌ها، مسأله حل می‌شود.

حال می‌پردازیم به حلی که از طرف کمیتهٔ طرح سؤالات المپیاد جهانی ارایه شده بود و البته، عدهٔ زیادی از افرادی که این مسأله را حل کردند با استفاده از آن راه آن را حل کرده بودند.

یک ایدهٔ خوب که در مسایل شبیه این مسأله خیلی به درد می‌خورد، شطرنجی کردن صفحهٔ مورد نظر است؛ به این ترتیب، هر مهره در خانه‌های سیاه فقط خانه‌های سفید و هر مهره در خانه‌های سفید فقط خانه‌های سیاه را می‌تواند تهدید کند.

تابع $f(n)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که $f(n)$ حداقل تعداد خانه‌های لازم برای علامت خوردن در صفحهٔ $۲n \times ۲n$ باشد. تعریف می‌کنیم $f_w(n)$ این حداقل برای خانه‌های سفید باشد طوری که تمام خانه‌های سیاه تهدید شوند. از آنجا که صفحه $۲n \times ۲n$

است، بنا بر تقارن اگر $f_b(n)$ هم برای خانه‌های سیاه مشابه $f_w(n)$ تعریف شود، خواهیم داشت $f_b(n) = f_w(n)$. از طرفی داریم $f(n) = f_b(n) + f_w(n)$؛ پس $f(n) = ۲f_w(n)$.

حال فرض کنیم قطر اصلی سیاه باشد. این قطر را افقی قرار داده و ردیف‌های موازی این قطر را در نظر می‌گیریم؛ به این ترتیب، طول ردیف‌های سیاه عبارت است از $۲.۴,۶,\ldots, ۲n,\ldots, ۴, ۲$.

حال، خانه‌های فرد ردیف‌های سفید که دقیقاً زیر ردیف‌های سیاه از طول $۲ - ۴i$ هستند را علامت می‌زنیم. در حالت اول(یعنی در بالای قطر اصلی)، در هر ردیف $۲i$ خانهٔ علامت خورده و در حالت دوم(یعنی زیر قطر اصلی) در هر ردیف $۱ + ۲i$ خانهٔ علامت خورده داریم؛ پس کلاً

$$۲ + ۴ + \cdots + n + \cdots + ۳ + ۱ = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

خانهٔ سفید علامت خورده داریم.

دیدن این که هر خانهٔ سیاه یک خانهٔ سفید علامت خورده در همسایگی دارد ساده است. این نشان می‌دهد که

$$f_w(n) \leq \frac{n(n+۱)}{۲}$$

حال $\frac{n(n+۱)}{۲}$ خانهٔ سیاه علامت خورده را در نظر بگیرید؛ آنها هیچ خانهٔ سیاهی در همسایگی به طور مشترک ندارند. این نشان می‌دهد که حداقل $\frac{n(n+۱)}{۲}$ خانهٔ سیاه علامت خورده لازم داریم تا تمام خانه‌های سفید تهدید شوند؛ یعنی

$$f_b(n) \geq \frac{n(n+۱)}{۲}$$

و در نتیجه

$$f(n) = n(n+۱)$$

و مسأله حل می‌شود.

چند مسألهٔ المپیادی

سید ماجد طاهری

اگر اهل مسأله حل کردن هستید، این گوی و این میدان که در التذاذ این کار شریک شوید! می‌توانید راه‌حل‌های خود را برایمان بفرستید. راه‌حل‌های برگزیده در شماره‌های آینده درج خواهند شد.

۱-۱ F نقطهٔ دلخواهی روی ضلع BC از مربع $ABCD$ است. از B عمودی بر DF رسم می‌کنیم و امتداد این عمود، خط BC را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. مقدار زاویهٔ FQC چقدر است؟

۱-۲ روی خانه‌های یک صفحهٔ شطرنج ۸ × ۸، ده سکه قرار می‌دهیم. در خانه‌هایی که حاوی سکه‌ای نیستند، تعداد خانه‌های مجاورشان که حاوی سکه هستند را می‌نویسیم(دو خانه را مجاور می‌گوییم اگر حد اقل یک رأس مشترک داشته باشند). آرایش سکه‌ها را طوری تعیین کنید که جمع عددهای نوشته‌شده روی خانه‌ها حداکثر مقدار ممکن شود.

۱-۳ روی یک صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰ مهره‌ای قرار دارد که می‌تواند در هر نوبت هفت خانه به سمت راست و سه خانه به سمت پایین حرکت کند. اگر مهره از ضلع پایینی یا ضلع سمت راست صفحه خارج شود، به‌ترتیب داخل ضلع بالایی یا ضلع سمت چپ صفحه می‌شود(می‌توان تصور کرد که ضلع‌های بالا و پایین و همین‌طور ضلع‌های راست و چپ صفحه به هم چسبانیده شده‌اند). مهره در آغاز کجا باشد تا پس از ۱۳۷۹ نوبت به یکی از چهار خانهٔ گوشه‌ای صفحه برسد؟

۱-۴ پدرام برای جشن تولد پانزده سالگیش تعدادی از دوستانش را دعوت کرد. کیک تولد او به شکل یک پانزده ضلعی منتظم بود که رویش پانزده شمع قرار داشت. پدرام کیک را طوری به قطعات مثلثی تقسیم کرد که سه رأس هر مثلث از بین رؤوس کیک و پای شمع‌ها انتخاب شده بود و در ضمن، روی هیچ قطعه کیکی شمعی نمانده بود. به همهٔ افراد جز خودش، یک قطعه کیک رسید. مهمان‌ها چند نفر بوده‌اند؟

مسألهٔ جایزه دار!

همهٔ نقاط صفحه را به‌طور دلخواه با چهار رنگ، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. ثابت کنید دو نقطهٔ هم‌رنگ در صفحه هستند که فاصله‌شان یا برابر یک است و یا برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$(نسبت طلایی).

راه‌حل‌های خود را به نشانی ماهنامه ارسال کنید. به راه‌حل‌های برگزیده، یک جلد کتاب جایزه داده می‌شود.

ریاضیات شمارهٔ ۱
(اردیبهشت ۱۳۷۹) صص ۴۶ـ۴۶

مقصود و وظیفهٔ ما چیست؟

دکتر غلامحسین مصاحب

دکتر غلامحسین مصاحب از پیشگامان انتشار مجلات ریاضی در ایران است. او در سال ۱۳۰۹، نخستین شمارهٔ مجلهٔ ریاضیات را منتشر کرد. در زیر، سرمقالهٔ نخستین شماره را به یاد گذشته‌ها می‌خوانیم.

هر چیزی را احتیاج بوجود می‌آورد. کتاب ــ مجله ــ روزنامه ــ قانون و حتی کار زائیدهٔ احتیاج است. بدینمعنی که اگر در علت ایجاد آنها غور کنیم می‌بینیم ابتدا انسان احتیاج محیط را بدانها دریافته و سپس درصدد ایجاد آنها برآمده است.

مجلهٔ ریاضیات عالی و مقدماتی نیز یکی از موالید احتیاجات محیط است. بانزده سال قبل نه فقط چنین مجله‌ای دوام نمی‌یافت بلکه اصلاً کسی بفکر ایجاد آنهم نمی‌افتاد. چرا؟ برای اینکه آنروز در تمام ایران سه محصل متوسطه بیش نبود و امروز فقط در طهران ۳۰۰۰ محصل و ۱۵۰۰ محصله مشغول تحصیل و فراگرفتن علوم و فنون مختلف که یکی از مهمترین آنها ریاضیات است، میباشند.

بعبارت اخری آنروز محیط احتیاج نداشت و امروز احتیاج آن بچنین مجله که در نوع خود منحصربفرد است در نزد اهل کمال واضح و محتاج به توضیح و تشریح نمی‌باشد. پس از ایراد این مقدمه یعنی پس از اینکه مسلم شد که مجله ریاضیات را احتیاج محیط بوجود آورده تکلیف و وظیفهٔ آن نیز معین می‌شود: **تشخیص احتیاجاتی که باعث ایجاد مجله شده و کوشیدن در رفع آنها**. نکات و ملاحظاتی که ما وادار به انتشار چنین مجله‌ای نموده سه چیز است:

اولاً نظر به احتیاج محصلین و محصلات بوسائلی برای مشق و تمرین و ورزش فکری. در ممالک اروپا هزاران کتاب و تألیفات متنوعه و مجلات علمی و فنی و تألیف و ایجاد نموده‌اند ولی در ایران محصلین و محصلات بکلی از این وسائل عاری میباشند و هیچگونه وسیله‌ای برای اینکه فکر خود را بکار بیندازند ندارند. مجلهٔ ریاضیات برای برطرف ساختن این نقص در هر یک از شماره‌ها مسائل حل‌شده از مقدماتی ببالا راجع بتمام شعب علوم ریاضی ــ فیزیک ــ مکانیک و هیئت و غیره را در دسترس محصلین و محصلات و اشخاصی که در این علوم کار می‌کنند می‌نهد. بعضی از مسائلی که در صفحات مجله حل می‌شود منتخب از مسائلی که در امتحانات نهایی و مسابقه‌های ایران داده شده میباشد و برخی مسائلی هستند که دانشمندان محترم و آقایان محصلین یا محصلات باذوق طرح نموده به اداره بفرستند. ضمناً هر مسئله که در شماره حل می‌شود در شماره‌ای که اقلاً یک ماه قبل از آن منتشر شده طرح می‌گردد. اینمدت برای این است که خوانندگان محترم مجال تفکر در حل مسائل را داشته باشند و ضمناً برای تشویق اسم هر مشترکی را که منتها پس از بیست و پنج روز پس از طرح مسئله باداره بفرستد در ذیل همان مسئله درج خواهد شد.

ثانیاً بسیاری از اشخاص هستند که فوق‌العاده شایق و مایل‌اند که از ترقیات روزافزون علوم آگاهی یافته و بر حدود و مشکلات آنها مطلع گردند. واضح است که نیل باین مقصود وسیله‌ای جز مشترک شدن جرائد و مجلات علمی اروپا که هرکدام قسمتی از این احتیاج را رفع می‌کند ندارد و این مطلب نیز مشهود است که یکنفر هیچگاه از عهدهٔ چنین عملی برنمی‌آید و اساساً رفع این احتیاج برعهدهٔ کتابخانه‌ها و قرائت‌خانه‌های ملی می‌باشد که متأسفانه هنوز در ایران تأسیس نشده است و تأسیس و ایجاد آنها یکی از بزرگترین آرزوهای ادارهٔ مجلهٔ ریاضیات است. باری مجله ریاضیات برای اینکه در رفع این احتیاج تا حدی که قدرت دارد کوتاهی نکرده باشد در هر شماره خلاصهٔ مطالب جدیده و اکتشافات و ترقیات نو را از نظر مشترکین محترم خود می‌گذراند.

ثالثاً و بالاخره نداشتن کتب علمی باعث اتلاف وقت بوده و زحمت زیادی برای محصلین ایجاد می‌کند. ادارهٔ مجله ریاضیات برای رفع این اشکال در نظر دارد ردهٔ کتب علمی متوسطه را که تألیف اغلب آنها تمام شده بحلیهٔ طبع درآورد.

واضح است که موفقیت در این قسمت همچنانکه موفقیت در دو قسمتی که قبلاً بدانها اشارتی رفت بدون تشویق و مساعدت مادی و معنوی طالبین علم و معرفت و دانشمندان محترم امکان‌پذیر نیست، فعلاً دورهٔ جبر و مقابلهٔ سالهای پنجم و ششم متوسطه را که تاکنون در ایران بطبع نرسیده است در انتهای شماره‌های مجله ریاضیات منتشر می‌کنم. این کتاب بسیار ساده نوشته شده و درخور فهم کلیه محصلین این قسمت میباشد. در آخر هر فصل و هر قسمت آنهم مسائلی راجع به آن فصل طرح می‌گردد که خوانندگان محترم در مطالب تمرین و مشق نمایند. ضمناً برای اینکه تا حدی که استطاعت داریم در خدمتگزاری بمعارف و فداکاری در راه نشر علم و معرفت کوتاهی نکرده باشیم متذکر می‌شویم که مشترکین ما برای اینکه بهتر ورزیده شوند ممکن است مسائل انتهای فصول را حل کرده در جوف پاکت به اداره ارسال دارند. ما زحمت تصحیح آنها را عهده‌دار شده و پس از تصحیح و تذکر ایرادات وارده به آدرس فرستندگان پس می‌فرستیم برای این قسمت فقط باید به‌اندازهٔ تمبری که روی پاکت الصاق شده در جوف پاکت تمبر بگذارند و برای زحمت تصحیح آن هیچ‌گونه تحمیلی نمی‌شود.

اینها خلاصه از نواقص و طرق اصلاح آنها بود ولی البته همان‌طورکه در فوق هم گفتیم موفقیت کامل ما بسته بتشویق و مساعدتهای دانشمندان و ایران‌دوستانست و مطابق مثل مشهور «یک دست صدا ندارد» و تا بحال دیده نشده که یک نفر بتنهایی درکاری پیشرفتهای عمده حاصل کند.

خلاصه چون صفحات مجله برای مقاصد عالی‌تر از این که در باب اهمیت آن مقاله نگارش یابد منتشر می‌گردد دیباچه را همین‌جا ختم کرده از باری‌تعالی موفقیت کامل را در خدمت بوطن عزیز و برادران و خواهران وطنی خود خواستاریم.

(مصاحب)